

Misura del diametro solare

Claudia Caldarella Elisa Cicillini

16 luglio 2021

Indice

Abstract	2
1 Introduzione	3
1.1 L'importanza del diametro solare	3
2 Lo strumento	4
2.1 Funzionamento	4
2.1.1 Linea Meridiana	4
2.1.2 Foro Stenopeico	6
3 Misure di tempo	8
3.1 Esperimento sul ritardo degli orologi	8
4 Tecniche di misurazione	11
5 Fenomeni aggiuntivi e relative fonti di incertezza	12
5.1 Sensibilità dell'occhio	12
5.2 Rifrazione "Cassiniana"	12
5.3 Penombra	13
5.4 Seeing e turbolenza	15
5.5 Fenomeni trascurati	16
6 Misura dei tempi di transito sulla meridiana	20
6.1 Equazione del tempo e stima dell'orario di transito	26
7 Confronto con i dati del cardinale De Zelada	34
8 Conclusioni	39
Appendice B	41

Abstract

Lo scopo di questo esperimento è quello di misurare il diametro del Sole utilizzando la tecnica dei transiti. Nello specifico sono state eseguite misure di transiti meridiani utilizzando lo Gnomone Clementino ubicato nella Basilica di Santa Maria degli Angeli a Roma.

Nel primo capitolo viene fatta un'introduzione all'esperimento spiegando le motivazioni che rendono il diametro solare una grandezza così interessante da studiare.

Nel secondo capitolo invece è presente una descrizione dettagliata dello strumento e del relativo funzionamento.

Nel terzo capitolo si espone un esperimento eseguito con degli orologi digitali per studiare lo sfasamento temporale di questi ultimi rispetto al TMEC.

Nel quarto capitolo si trattano invece le tecniche di misura utilizzate nella stima del diametro solare angolare.

Nel quinto capitolo viene fatta una trattazione di alcuni fenomeni fisici aggiuntivi di cui bisogna tenere conto in fase di analisi dati, come ad esempio la rifrazione atmosferica e la penombra, ed altri fenomeni i cui effetti sono stati trascurati.

Nel sesto capitolo sono state riportate le tabelle contenenti le misure effettuate in Basilica ed i diametri angolari da esse ricavati. Questi ultimi sono stati poi confrontati con i valori attesi delle Effemeridi.

Si è inoltre trattata l'equazione del tempo e sono stati riportati nelle apposite tabelle gli orari di transito meridiano da cui si è poi ricavata la deviazione della linea meridiana.

Nel settimo capitolo è stato fatto un confronto dei diametri solari angolari ottenuti dalle misure in Basilica e quelli stimati dal cardinale de Zelada, approfondendo il fenomeno dell'irradiazione.

Nell'ultimo capitolo sono riportate infine le conclusioni dell'esperimento.

1 Introduzione

1.1 L'importanza del diametro solare

La dimensione del diametro solare è ancora oggi un argomento di grande interesse e dibattito in quanto si tratta di un parametro di fondamentale importanza per gli studi astrofisici e tuttora caratterizzato da una complessità nella misurazione. Tale difficoltà, in parte, risiede nel fatto che la sfera Solare non appare come una sfera di acciaio inossidabile, di cui sarebbe più semplice definire il diametro, ma si tratta di un corpo fluido in rotazione caratterizzato da un progressivo passaggio di flusso dagli strati più interni a quelli più esterni. È stata dimostrata una rotazione differenziale osservata nella fotosfera: le zone più vicine all'equatore risultano più veloci rispetto ai poli, ciò persiste anche nella zona convettiva mentre la zona radiativa ruota come un corpo rigido. Inoltre la velocità di rotazione a grandi latitudini aumenta dalla superficie verso l'interno, mentre a basse latitudini decresce verso l'interno.

Bisogna anche considerare che le misure effettuate da Terra sono soggette a maggiori problematiche causate dalle perturbazioni atmosferiche come, ad esempio, lo spostamento delle masse d'aria e i cambiamenti dell'indice di rifrazione legati a differenze di temperatura a diverse altitudini.

Tuttavia stimare con alta accuratezza il diametro solare risulta necessario per diversi motivi, primo fra tutti è che è un parametro alla base dei modelli stellari e pertanto una sua variazione in termini di valore assoluto, nonché delle sue variazioni temporali, porterebbe a cambiamenti sulle strutture stellari. Inoltre la stima della dimensione del diametro solare ci permette di calcolare la sua luminosità, dalla legge di Stephan $L = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T^4$, e la quantità di energia radiativa che arriva sulla Terra influenzandone così la composizione atmosferica. Si è recentemente dimostrato infatti che piccole variazioni, ma persistenti, nel flusso di energia svolgerebbero un ruolo significativo nei cambiamenti climatici attraverso l'influenza diretta sugli strati superiori dell'atmosfera terrestre.

Partendo dall'equazione di Stephan si può ricavare l'entità di queste variazioni:

$$\frac{\Delta L}{L} = 4 \frac{\Delta T}{T} + 2 \frac{\Delta R_{\odot}}{R_{\odot}} \quad (1)$$

Assumendo lungo il ciclo solare¹:

$$L = 1361 \text{ W/m}^2 \quad T_{eff} = 5772 \text{ K} \quad \frac{\Delta L}{L} = 0.01\% \quad \frac{\Delta T}{T} = 1.35 \text{ K} \quad (2)$$

Si ottiene dunque:

$$\Delta R_{\odot} = 9.4 \text{ mas} \quad (6.8 \text{ km}) \quad (3)$$

La forma dei lembi solari (curvatura) può cambiare in latitudine e nel tempo a causa di una struttura termica asferica. Lo studio della radiazione solare a seguito di esperimenti spaziali ha evidenziato che l'irraggiamento totale varia su scale temporali dei minuti fino agli 11 anni del ciclo solare. Su questi tempi il tasso di produzione di energia nucleare al centro rimane costante mentre il tasso di emissione di energia dalla superficie varia, ciò implica la presenza di un serbatoio intermedio di energia (campo gravitazionale) dove l'energia può essere immagazzinata o rilasciata a seconda del tasso variabile di trasporto di energia e ciò porta ad una variazione del raggio solare.

¹Caccin & Penza (2003).

2 Lo strumento

Lo Gnomone Clementino è uno strumento inaugurato nel 1702 nella Basilica di Santa Maria degli Angeli a Roma, costruito dall'astronomo e archeologo Francesco Bianchini e finanziato da papa Clemente XI. Lo strumento venne costruito al fine di conoscere con la maggior precisione possibile la data dell'equinozio di primavera, fondamentale per il calcolo della Pasqua. Per ospitare la Meridiana venne scelta la Basilica di Santa Maria degli Angeli perché abbastanza grande per contenere una linea lunga 45 m e perché le mura, che appartenevano alle Terme di Diocleziano, non avevano più movimenti di assestamento.

2.1 Funzionamento

Lo strumento è composto principalmente da due componenti: il foro gnomico, detto gnomone australe, e una linea meridiana orientata da Sud a Nord. La Meridiana di Santa Maria degli Angeli è una meridiana a camera oscura perché costruita all'interno di uno spazio molto ampio e scarsamente illuminato rendendo così possibile lo studio sul diametro solare con buona precisione. È presente un secondo gnomone, lo gnomone boreale, nella parete Nord della Basilica sopra l'arcata che precede il presbiterio, ad un'altezza di circa 24 metri. Da questo era possibile osservare la Stella Polare.

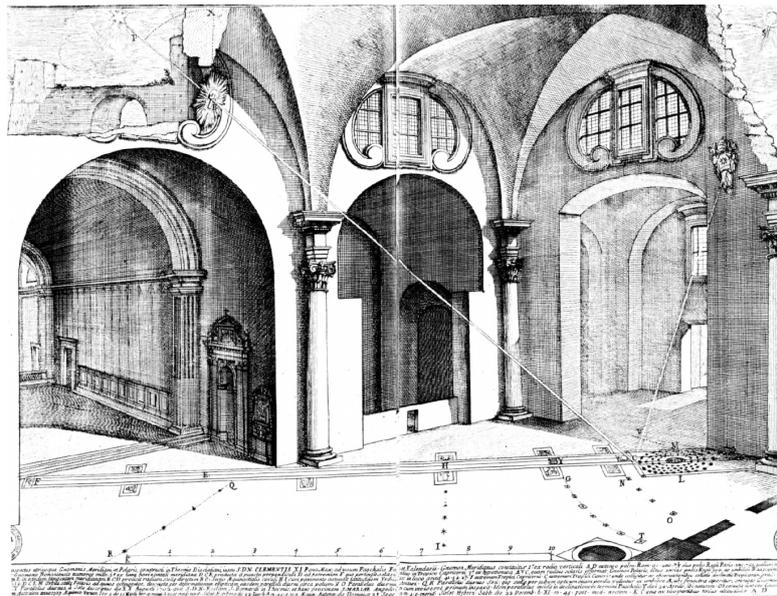


Figura 1: Disegno originale di Francesco Bianchini dello strumento e delle sue componenti. In alto a destra è visibile lo Gnomone Clementino, o gnomone australe, mentre a sinistra è rappresentato lo gnomone boreale. La linea meridiana è visibile sul pavimento della chiesa.

2.1.1 Linea Meridiana

La linea meridiana consiste in una sottile striscia di bronzi che si estende dalla base del foro stenopeico verso Nord ed ha una lunghezza di 45 m. Lungo la linea si possono osservare le rappresentazioni dei segni zodiacali, accoppiati a due a due, ad eccezione dei segni del Cancro e del Capricorno che si trovano in corrispondenza dei solstizi, e con posizioni che corrispondono a 12 settori uguali dell'eclittica di 30° ciascuno. Sono inoltre presenti i nomi di 22 stelle con le coordinate celesti che avevano nell'anno 1701: la loro

posizione sulla linea dipende dalla declinazione. Lungo la linea meridiana, nel punto dell'equinozio, sono inserite due ellissi che hanno la dimensione esatta dell'immagine solare. Qui sono presenti le scritte *Terminus Paschae*, che evidenziano i punti corrispondenti ai due giorni tra i quali può oscillare la data della Pasqua: 22 marzo – 25 aprile. L'equinozio viene sottolineato anche da una traccia di stelle sul pavimento a sinistra della linea meridiana e che materializza il percorso del Sole prima di raggiungerla: è la linea equinoziale, la proiezione dell'equatore sul pavimento.



Figura 2: Fotografia della linea meridiana

Per tracciare la meridiana, una volta collocato il foro stenopeico, Bianchini determinò la verticale del foro attraverso il filo a piombo, smorzandone nell'acqua le piccole oscillazioni.

Per determinare la direzione Nord-Sud, utilizzò una meridiana ausiliaria posta a Palazzo Venezia: quando su questa avveniva il transito fissava sul pavimento della Basilica la posizione del Sole. In questo modo l'eventuale errore di orientamento della meridiana ausiliaria sarebbe stato trasferito anche a quella di Santa Maria degli Angeli. Infatti la meridiana presenta una deviazione dal Nord verso l'Est di $4' 28.8'' \pm 0.6''$ che riflette probabilmente l'errore già presente nella meridiana ausiliaria. Ciò implica la presenza di errori sistematici nei transiti giornalieri del Sole, con deviazioni maggiori in prossimità della parte della meridiana più lontana dalla base del foro stenopeico, ossia nel solstizio d'Inverno. Oltre a questa deviazione occorre considerare che la linea di bronzo della meridiana è composta da diversi segmenti fissati tra loro con delle viti e, in prossimità delle giunzioni, si trovano piccole discontinuità che possono portare ad ulteriori imprecisioni nelle misure.

Per conoscere la latitudine del luogo Bianchini realizzò la meridiana boreale per osservare la stella Polare da dentro la Basilica e valutò la posizione del Polo Nord Celeste apparente che si trova a metà tra il transito superiore e quello inferiore della stella Polare.

Lungo la meridiana sono riportate le parti centesime dell'altezza del foro stenopeico: in corrispondenza del numero 100 la linea e l'altezza del foro formano un triangolo isoscele e quindi, quando il Sole transita su quel numero, si trova a 45° di elevazione rispetto al

pavimento. La linea arriva fino al numero 220, in corrispondenza del quale avviene il solstizio d’Inverno.

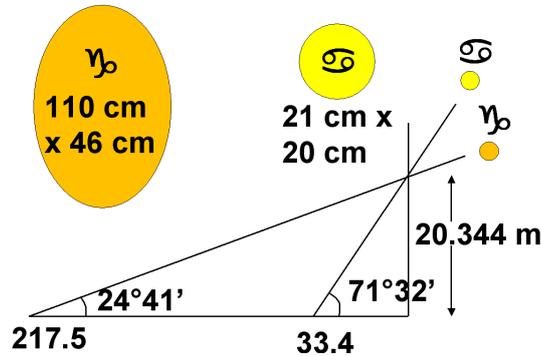


Figura 3: Triangoli che hanno come cateto comune la verticale del foro alta 100 e come altro cateto due diverse lunghezze della linea meridiana. L’angolo formato del pavimento è dato dalla formula $\theta = \arctan\left(\frac{100}{\text{lunghezza linea}}\right)$; la distanza dallo zenit vale invece $\gamma = \arctan\left(\frac{\text{lunghezza linea}}{100}\right)$

2.1.2 Foro Stenopeico

Alla base del principio di funzionamento dello Gnomone Clementino c’è il foro stenopeico, una piccola apertura collocata in un apposito vano scavato nel muro Sud-Est della Basilica di diametro di 25 mm e posta ad un’altezza di 20.344 m dal pavimento della Basilica. Il foro ha:

Longitudine: 12° 29’ 51’’

Latitudine: 41° 54’ 11’’

Altitudine: 70 m sopra il livello del mare.

All’interno del foro passano i raggi solari che si propagano in linea retta e che producono l’immagine del Sole capovolta che si muove sul pavimento della Basilica.

Il diametro angolare del disco solare è dato dal rapporto del diametro del Sole $D_{\odot} \sim 1.5 \cdot 10^6 \text{ km}$ e dalla sua distanza media da noi $L \sim 150 \cdot 10^6 \text{ km}$ e quindi $\frac{D_{\odot}}{L} \sim \frac{1}{100}$ ovvero circa 32’ d’arco (mezzo grado). Questo valore è maggiore di quello del foro stenopeico, visto dall’interno della Basilica, in cui il diametro $D \sim 25 \text{ mm}$ e la distanza foro-immagine F varia a seconda del periodo di osservazione e va da un valore minimo di $F_e \sim 21.7 \text{ m}$ durante il solstizio d’Estate e un valore massimo di $F_i \sim 49.2 \text{ m}$ durante il solstizio d’Inverno. Quindi il rapporto focale varia tra $\frac{F_e}{D} \sim 868$ e $\frac{F_i}{D} \sim 1968$ ed il potere risolutivo dello strumento è tanto migliore quanto maggiore è il rapporto focale.



Figura 4: Fotografia del foro stenopeico della meridiana.

Ciò significa che attraverso il foro stenopeico non si vede l'area totale del Sole, ma solo una frazione di diametro che dipende dal periodo di osservazione, mentre la luce di ogni punto dell'immagine arriva da un disco ampio quanto quella stessa frazione dell'intero disco solare: ogni elemento infinitesimo di disco illumina il foro e si proietta in un punto diverso; l'insieme di tutti i contributi darà la totalità del Sole. La risoluzione angolare dello strumento è pari quindi alla frazione del diametro del Sole osservabile. In ogni punto dell'immagine si osserva "una media" di quanto inquadrato dal foro: i dettagli più piccoli vengono convoluti con ciò che hanno intorno entro la risoluzione angolare, quelli più grandi appaiono in modo più o meno evidente a seconda delle loro dimensioni. Ad esempio nelle settimane intorno al solstizio d'Inverno si può vedere un'area di Sole di diametro pari ad $1/30$ del suo diametro: la risoluzione angolare è $1/30$ del diametro del Sole, cioè circa un (minuto) primo d'arco. Pertanto attraverso il foro stenopeico è possibile osservare solo le macchie solari estremamente grandi, come fatto al tempo anche da Galileo e Keplero. L'immagine del Sole sulla meridiana appare più luminosa in estate, come conseguenza del minore rapporto focale e della minore area di distribuzione del fascio, e più pallida e meno contrastata in inverno. L'effetto di convoluzione è osservabile anche al bordo dell'immagine: la luce del bordo viene infatti convoluta con quella del cielo e ciò provoca una regione di penombra attorno al lembo solare. La penombra allarga l'immagine del Sole e anche Bianchini correggeva le misure del diametro angolare sottraendo il valore della penombra: "*dempta penumbra*".

3 Misure di tempo

L'obiettivo dell'esperienza è la misura del diametro solare attraverso la misura dei tempi di transiti meridiani nella Basilica di Santa Maria degli Angeli. Un primo contributo di errore a questa misura è dato dal possibile ritardo presente nell'orologio utilizzato nelle misure.

3.1 Esperimento sul ritardo degli orologi

L'orologio utilizzato per calcolare l'istante di transito del Sole è un orologio digitale, G-SHOCK della Casio, che si sintonizza automaticamente via Internet ogni 24 h alle 00:00 del giorno corrente. Si è riusciti ad inibire la sincronizzazione per un mese intero e quello che si è notato è che l'orologio ha mostrato una tendenza ad andare in anticipo di 0.11 s al giorno rispetto al tempo Universale coordinato (UTC).

Per effettuare la stima del tempo di transito meridiano occorre tener conto dell'errore di anticipo presente nell'orologio: l'orologio a mezzodì ha accumulato un anticipo di circa 5 centesimi di secondo su UTC.

Inoltre sono stati eseguiti ulteriori esperimenti utilizzando altri due orologi analogici per verificare il ritardo che accumulano col tempo. L'intenzione iniziale era quella di utilizzare uno di questi due orologi per svolgere nuove misure ma ciò non è stato possibile a causa del lockdown. Per fare ciò sono stati realizzati dei video, e successivamente analizzati, in cui è stata confrontata l'ora degli orologi con il tempo medio dell'Europa centrale (TMEC)². Quello che si è fatto nello specifico è stato scegliere un valore temporale di riferimento τ e, analizzando i video con il programma Quick Time Player, sono stati segnati gli istanti temporali in cui TMEC e l'orologio digitale raggiungevano τ stesso. Questi valori sono riportati nelle tabelle sottostanti per entrambi gli orologi:

TMEC (s)	Orologio 1 (s)	Δt (s)	Data (anno 2020)	Errore di sincronizzazione (s)
$2,94 \pm 0,03$	$14,45 \pm 0,03$	$11,51 \pm 0,03$	20 febbraio	0,53
$3,99 \pm 0,03$	$15,45 \pm 0,03$	$11,46 \pm 0,03$	22 febbraio	0,45
$1,83 \pm 0,03$	$12,92 \pm 0,03$	$11,09 \pm 0,03$	24 febbraio	0,59
$1,95 \pm 0,03$	$12,49 \pm 0,03$	$10,54 \pm 0,03$	27 febbraio	0,83
$3,06 \pm 0,03$	$12,44 \pm 0,03$	$9,38 \pm 0,03$	05 marzo	0,45
$3,9 \pm 0,03$	$12,21 \pm 0,03$	$8,31 \pm 0,03$	11 marzo	0,59
$2,43 \pm 0,03$	$10,4 \pm 0,03$	$7,97 \pm 0,03$	14 marzo	0,46

Tabella 1: Dati relativi al primo orologio digitale. La quantità Δt è la differenza tra i tempi impiegati dall'orologio e da TMEC a raggiungere lo stesso tempo di riferimento τ .

²E' stato possibile eseguire questi esperimenti collegandoci al sito dell'INRIM che alleghiamo <http://rime.inrim.it/labtf/tempo-legale-italiano/>

TMEC (s)	Orologio 2 (s)	Δt (s)	Data (anno 2020)	Errore di sincronizzazione (s)
$2,47 \pm 0,03$	$3,44 \pm 0,03$	$0,97 \pm 0,03$	23 febbraio	0,43
$2,6 \pm 0,03$	$2,73 \pm 0,03$	$0,13 \pm 0,03$	24 febbraio	0,54
$1,9 \pm 0,03$	$1,7 \pm 0,03$	$-0,2 \pm 0,03$	25 febbraio	0,66
$3,47 \pm 0,03$	$2,44 \pm 0,03$	$-1,03 \pm 0,03$	26 febbraio	0,55
$8,47 \pm 0,03$	$6,21 \pm 0,03$	$-2,26 \pm 0,03$	28 febbraio	0,96
$10,18 \pm 0,03$	$6,21 \pm 0,03$	$-3,97 \pm 0,03$	02 marzo	0,43
$12,11 \pm 0,03$	$5,14 \pm 0,03$	$-6,97 \pm 0,03$	07 marzo	0,43
$18,12 \pm 0,03$	$5,47 \pm 0,03$	$-12,65 \pm 0,03$	16 marzo	1,75

Tabella 2: Dati relativi al secondo orologio digitale. La quantità Δt è la differenza tra i tempi impiegati dall'orologio e da TMEC a raggiungere lo stesso tempo di riferimento τ .

L'andamento nel tempo ottenuto è riportato nei grafici seguenti:

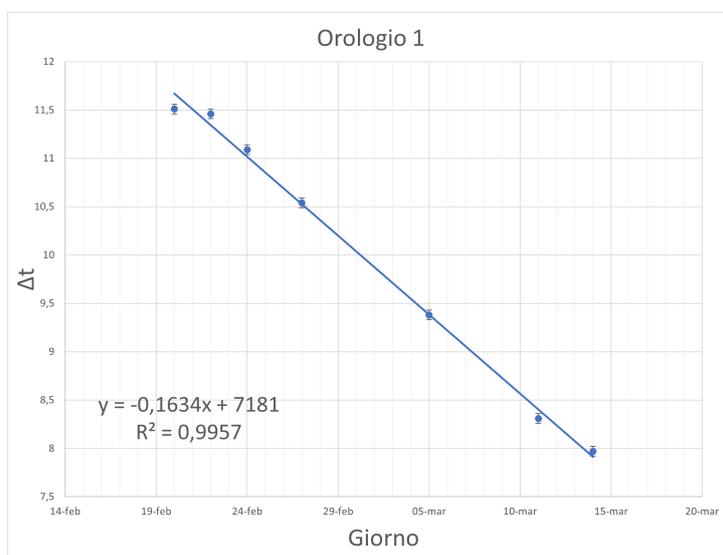


Figura 5: Ritardo del primo orologio digitale in funzione del tempo

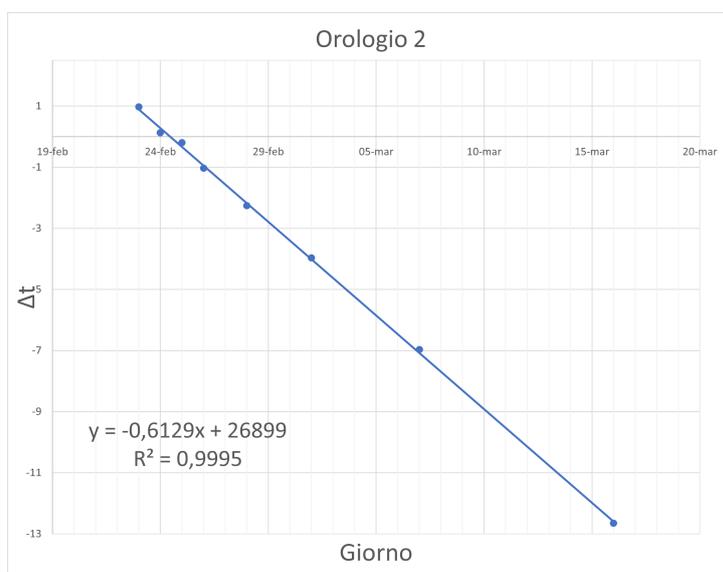


Figura 6: Ritardo del secondo orologio digitale in funzione del tempo

Gli orologi sono entrambi dei Casio digitali. Dai grafici si osserva un andamento lineare: l'orologio 1 è in ritardo e questo ritardo diminuisce con il tempo, mentre l'orologio 2 inizialmente è in ritardo ed il ritardo diminuisce a tal punto da rendere l'orologio in anticipo rispetto al TMEC. Questi ritardi/anticipi temporali sono probabilmente legati sia al taglio approssimativo del quarzo utilizzato per la costruzione degli orologi stessi sia a variazioni di temperatura alle quali sono sottoposti. Nel primo caso il quarzo deve essere opportunamente tagliato e quindi assumere una certa forma per poter assumere le sue caratteristiche peculiari, al giorno d'oggi quella che assicura le prestazioni migliori è la *tuningfork* (a *forchetta*). Per quanto riguarda la dipendenza dalla temperatura sappiamo che il funzionamento ottimale di questi orologi avviene a $T \simeq 28^{\circ}C$ e quindi quella che gli orologi raggiungono quando indossati, nel nostro caso gli orologi non sono stati tenuti al polso durante il periodo degli esperimenti ma lasciati a temperatura ambiente e di conseguenza, gli orologi non hanno lavorato nelle migliori condizioni possibili. Si vuole far notare che nelle tabelle soprastanti una colonna è dedicata all'Errore di sincronizzazione³ che rappresenta lo scarto di tempo per sincronizzare via Internet l'orologio del nostro compilatore all'orologio visualizzato sulla pagina dell'INRIM, sincronizzato ogni minuto alla scala di tempo UTC(IT) generata da orologi atomici. L'INRIM fornisce un servizio di sincronizzazione del sistema informatico connesso ad Internet, basato su due server primari NTP (Network Time Protocol) installati presso il Time Laboratory e sincronizzati al fascio di cesio ospitato in quel laboratorio. Lo sfasamento temporale tra l'orario di riferimento dei server NTP e la scala temporale nazionale italiana viene continuamente monitorato e mantenuto al di sotto del livello di alcuni millisecondi. La precisione della sincronizzazione dipende dalla rete informatica e dalla distanza tra i server NTP e il PC / server da sincronizzare. Si può ottenere una sincronizzazione a livello di centinaia di microsecondi per i dispositivi appartenenti alla rete dei server NTP, mentre per le reti remote si potrebbero ottenere alcune centinaia di millisecondi.

³Dal momento che l'errore di sincronizzazione riguarda l'orologio del compilatore non è stato considerato nell'esperimento ma è stato citato per completezza.

4 Tecniche di misurazione

Rispetto alla linea meridiana si possono distinguere quattro lembi dell'immagine: due perpendicolari alla linea, due tangenti ad essa. I lembi perpendicolari si dividono in meridionale, più lontano dal foro, e settentrionale, più vicino al foro. I due lembi tangenti toccano la linea in momenti differenti del transito: il lembo precedente è il lembo occidentale, quello seguente è il lembo orientale.

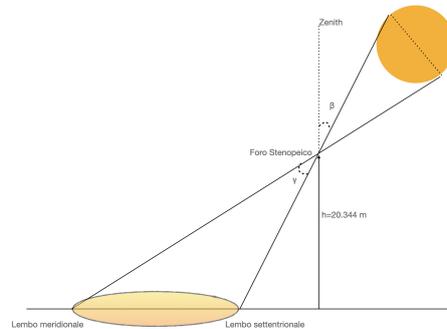


Figura 7: Schema della proiezione dell'immagine del Sole sulla linea meridiana.

I lembi meridionale e settentrionale venivano misurati da Bianchini con il compasso e il regolo "ticonico", oggi si utilizza il metro raggiungendo una precisione fino a mezzo millimetro. Questi vengono utilizzati per ricavare la declinazione del Sole. I lembi precedente e seguente invece vengono misurati mediante i loro tempi di contatto, raggiungendo una precisione temporale fino a mezzo secondo, e vengono utilizzati per determinare la durata dell'anno tropico.

Per quanto riguarda i lembi meridionale e settentrionale non è stato possibile effettuare le misure in Basilica e di conseguenza è stata ricavata la declinazione del Sole dai siti *Calsky* e *Stellarium 0.20.2* sfruttando l'ora del mezzogiorno e le coordinate in latitudine e longitudine della Basilica.

Per quanto riguarda i lembi occidentale e orientale invece, attraverso la videocamera di un telefono, sono stati ripresi i transiti meridiani e successivamente sono stati analizzati i fotogrammi attraverso il programma Quick Time Player per stabilire l'istante del transito, che avviene quando l'immagine del disco solare è divisa a metà dalla linea, e gli istanti in cui il lembo occidentale e quello orientale toccano la meridiana. Quando possibile, sono state aggiunte linee parallele alla meridiana in modo da ricavare altri tempi di contatto dei lembi per ottenere un riferimento temporale più preciso.

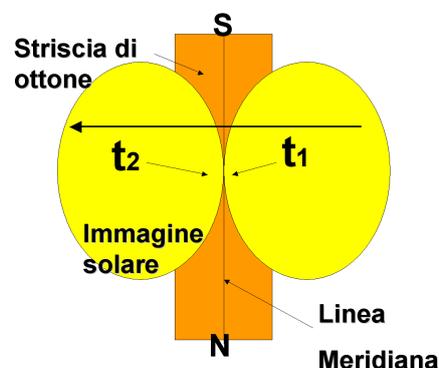


Figura 8: Schema del transito del Sole lungo la linea meridiana

5 Fenomeni aggiuntivi e relative fonti di incertezza

In questo capitolo si vogliono trattare alcuni fenomeni di cui bisogna tener conto in fase di analisi dati per eseguire al meglio la stima del diametro solare.

5.1 Sensibilità dell'occhio

L'immagine del Sole che compare nel pavimento della Basilica durante il transito meridiano presenta una regione di penombra attorno al disco solare; l'occhio umano possiede una sensibilità logaritmica allo stimolo di luce, che può essere rappresentata dalla legge di Weber-Fechner:

$$p = k \cdot \ln \frac{S}{S_0} \quad (4)$$

dove p è l'intensità dello stimolo effettivamente percepita, S è l'intensità dello stimolo, S_0 è l'intensità dello stimolo iniziale, k è un fattore di proporzionalità legato all'unità di misura dello stimolo.

Talvolta si usa porre $S_0 = 1$, che corrisponde al ritenere la costante di integrazione nulla ($C = 0$), ottenendo così⁴:

$$p = k \cdot \ln S \quad (5)$$

Quindi uno stimolo meno intenso è percepito in misura inferiore: questo porta ad escludere dalla misura le parti più esterne della zona di penombra che sono molto meno luminose rispetto al centro disco.

5.2 Rifrazione "Cassiniana"

La rifrazione atmosferica è un fenomeno che consiste nella deviazione della luce da una linea retta, mentre attraversa l'atmosfera terrestre, ed è dovuta a variazioni di densità presenti nei diversi strati dell'atmosfera stessa. Il raggio di luce proveniente da un astro deve quindi attraversare strati atmosferici via via più densi al diminuire dell'altezza sull'orizzonte, subendo così una deviazione dalla traiettoria rettilinea con risultato di una curvatura rispetto alla verticale.

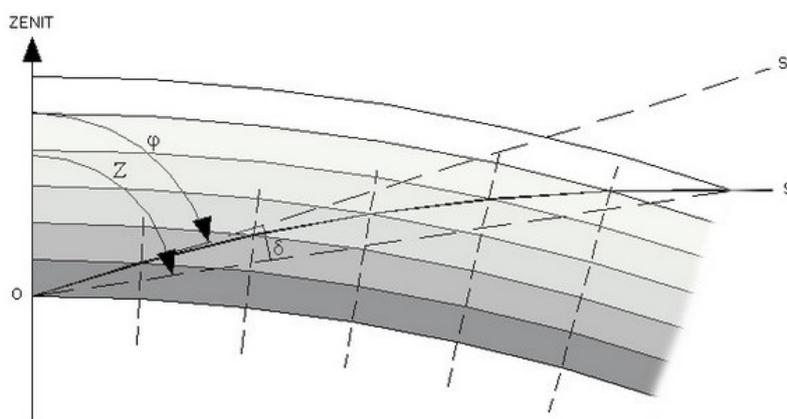


Figura 9: Schema della rifrazione atmosferica

⁴Si parte considerando $dp = k \frac{dS}{S}$ e integrando si ottiene $p = k \ln S + C$.

E' possibile determinare lo stato iniziale dello stimolo, ovvero il livello di stimolo tale per cui la percezione risulti nulla, ponendo $p = 0$ e ottenendo così $C = -k \ln S_0$.

Per un osservatore posto in O la luce proveniente dalla stella in S sembra in realtà provenire da S' e di conseguenza non viene misurato l'angolo zenitale Z ma l'angolo zenitale apparente $\phi = Z - \delta$.

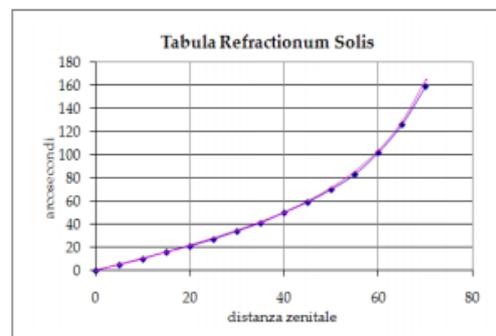
Per un astro allo zenit la rifrazione è nulla ma all'aumentare della distanza zenitale il suo valore cresce sempre di più.

Il primo a studiare quantitativamente la rifrazione atmosferica fu Tycho Brahe, un astronomo danese, in occasione delle misure di posizione della supernova del 1572. Egli si accorse che le misure di posizione differivano in modo sistematico da un osservatorio all'altro, nello specifico per gli osservatori più a Sud la stella tendeva ad avere una declinazione apparente più a Nord.

Giandomenico Cassini (1625-1712) fu uno tra i primi ad elaborare delle tavole empiriche di correzioni relative alla rifrazione atmosferica, che tende ad innalzare di circa 1' la posizione apparente dell'equatore, utilizzando la meridiana di S. Petronio a Bologna.

Nella figura sottostante si riporta la tabella contenente le correzioni di Cassini e il relativo grafico:

Distanza zenitale	Correzione Cassini ["]	$60'' \cdot \tan(z)$
0	0	0
5	5	5.2
10	10	10.6
15	16	16.1
20	21	21.8
25	27	28.0
30	34	34.6
35	41	42.0
40	50	50.4
45	59	60.0
50	70	71.5
55	83	85.7
60	102	103.9
65	126	128.7
70	159	164.9



(a) Tavole contenenti le correzioni di Cassini (b) Grafico contenente le correzioni di Cassini

Figura 10: Correzioni di Cassini

Oggi è possibile riassumere le correzioni empiriche di Cassini mediante la formula:

$$c = 60'' \tan(z) \quad (6)$$

valida fino a $z = 75^\circ$ e che troviamo rappresentata anche nella terza colonna della tabella soprastante. In questo modo è possibile stimare l'angolo corretto z' mediante:

$$z' = z + c \quad (7)$$

Dal momento che sono state utilizzate le misure di declinazione apparente ricavate tramite *Calsky* e *Stellarium*, è stato necessario prendere in considerazione questo fenomeno nel calcolo dell'angolo zenitale per stimare poi la penombra ed il diametro solare reale.

5.3 Penombra

Quando la luce del Sole attraversa il foro stenopeico, il raggio proveniente dal bordo sinistro del Sole produce il bordo destro dell'immagine solare, mentre il raggio proveniente dal bordo destro produce quello sinistro. Se si utilizza un foro piccolo, idealmente

puntiforme, l'immagine solare ottenuta ha dei bordi netti ma risulta poco luminosa, dato che attraverso il foro può entrare poca luce.

Utilizzando un foro stenopeico più grande come quello presente in Basilica, l'area luminosa che si ottiene è composta da immagini sovrapposte del Sole: è presente una parte centrale più luminosa circondata da un bordo sfocato. La parte centrale dell'area visibile è il risultato di un'interferenza costruttiva delle immagini del Sole, mentre il bordo è una penombra che è pari alla larghezza stessa del foro stenopeico.

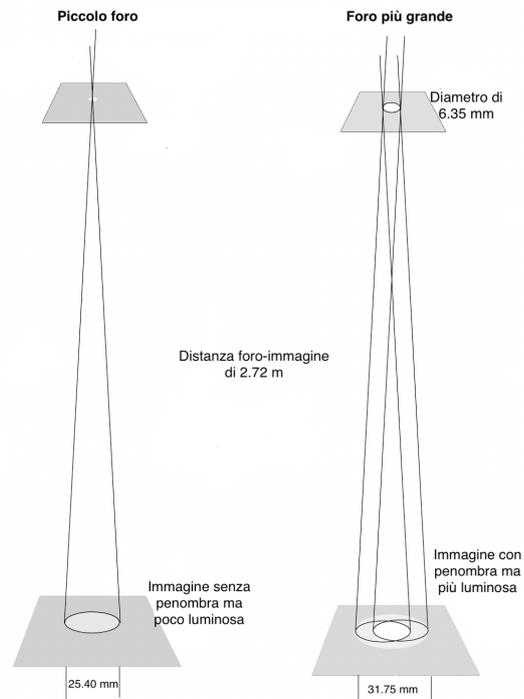


Figura 11: Immagine solare con e senza penombra a seconda delle dimensioni del foro stenopeico.

Come mostrato nella figura 11, quando il foro non è puntiforme entrambi i raggi provenienti dai bordi sinistro e destro del Sole passano attraverso le due estremità del foro, causando così una bassa luminosità del disco ai bordi dell'immagine che è proprio quella che si avrebbe con un foro piccolo. Quindi la penombra è la manifestazione sui bordi delle immagini solari che si otterrebbero con un foro stenopeico minuscolo, che risulterebbero molto meno luminose, determinando un effetto ombreggiante.

Nel caso riportato in figura, il foro a destra ha un diametro di 6.35 mm e la sua immagine è composta da un'area luminosa di diametro circa pari a 19.05 mm ed un bordo sfocato largo circa 6.35 mm. In realtà il bordo più scuro ci appare molto più stretto a causa della sensibilità logaritmica dell'occhio alla luce. Quindi l'immagine che percepiamo è più nitida rispetto a quella rappresentata in figura.

Nel caso dello Gnomone Clementino, il pavimento della Basilica non è perpendicolare al foro stenopeico. Ciò significa che i raggi del Sole sono inclinati rispetto alla meridiana e questo causa la formazione di un'immagine ellittica anziché circolare. L'inclinazione modifica quindi le dimensioni del disco, ma la penombra non subisce un'analoga dilatazione: resta sempre delle dimensioni del foro stenopeico, in quanto risultato delle sovrapposizioni di più immagini tutte uguali tra loro, prodotte dal passaggio della luce solare attraverso il foro.

Inoltre la penombra rimane simmetrica rispetto al centro del Sole, quindi la misura della posizione del centro del disco solare, ottenuta mediando le posizioni dei lembi, dipende

solo dalla precisione con cui questi sono misurati.

Per rimuovere l'effetto della penombra si calcola quanto vale il suo contributo al diametro angolare del Sole. Occorre tener conto del fatto che il foro, di diametro di 25 mm , ha forma cilindrica con altezza pari a 6.11 mm : l'inclinazione dei raggi solari incidenti sul foro provoca un'apparente diminuzione del diametro del foro stenopeico, come mostrato in figura 12.

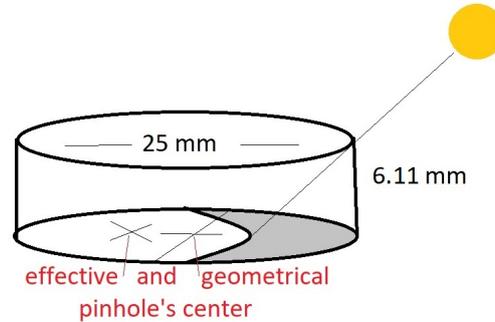


Figura 12: Il diametro efficace del foro stenopeico lungo la linea meridiana varia in base all'inclinazione dei raggi solari incidenti.

Quindi il diametro efficace del foro lungo l'asse meridiano, e di conseguenza la penombra, si modifica in base alla posizione del Sole e quindi varia con le stagioni. Per calcolare il diametro efficace si è utilizzata la formula:

$$d_{eff} = d - a \cdot \tan(z) \quad (8)$$

dove $d = 25\text{ mm}$ è il diametro del foro, $a = 6.11\text{ mm}$ è la sua altezza e z è l'angolo zenitale.

Il diametro angolare efficace del foro è quindi dato dalla formula:

$$\theta = \arctan\left(\frac{d_{eff}}{b}\right) \quad (9)$$

dove b è la distanza tra il foro e l'immagine espressa in millimetri, ricavata dall'espressione:

$$b = \frac{c}{\sin(h)} \quad (10)$$

con $c = 20,345\text{ m}$ altezza del foro e $h = 90^\circ - z$ angolo complementare all'angolo zenitale, quindi alla base del triangolo che ha per ipotenusa b e per cateto c .

Per ottenere il diametro angolare reale δ del Sole occorre sottrarre al diametro angolare misurato δ' il valore del diametro angolare del foro θ .

$$\delta = \delta' - \theta \quad (11)$$

Quello della penombra è quindi un effetto geometrico riscontrabile ogni volta che si utilizza un foro stenopeico non puntiforme.

5.4 Seeing e turbolenza

L'immagine solare sul pavimento della Basilica appare in continua vibrazione. Ciò accade perché il foro stenopeico all'esterno si trova su un piano di mattoni che in prossimità del transito è scaldato dal Sole: l'aria calda si solleva e genera turbolenza. Un'ulteriore sorgente di turbolenza è costituita dal flusso d'aria che attraversa il foro a causa della differenza di temperatura tra interno ed esterno. Le bolle d'aria hanno dimensioni

maggiori di quelle del foro, quindi viene influenzata tutta l'immagine solare. Questo fenomeno si ripete in modo casuale con disturbi a frequenze superiori alle 10 volte al secondo. La nostra vista tende a compensare questi disturbi dovuti alla turbolenza, facendone una media nel tempo, ed il punto corrispondente al lembo solare può essere individuato con un'accuratezza del mezzo secondo, tuttavia essi restano comunque visibili e non trascurabili durante la misura. L'effetto della turbolenza locale e di quella propria dell'atmosfera, che si genera tra strati a differenti velocità, costituisce il seeing astronomico.

5.5 Fenomeni trascurati

Limb darkening Il limb darkening (oscuramento al bordo) consiste nella diminuzione dell'intensità luminosa, proveniente da una stella o da un altro corpo celeste, in prossimità del perimetro del disco visibile. Questo fenomeno è dovuto al fatto che la densità e la temperatura della stella decrescono al crescere della distanza dal centro: osservando al centro del Sole si riesce a penetrare più in profondità entro l'atmosfera solare, mentre osservando al bordo si vedono gli strati più superficiali che sono anche più freddi e quindi meno luminosi.

Infatti la temperatura della stella risulta più alta nelle regioni interne e più bassa in quelle esterne e quindi, dal momento che l'intensità della radiazione di corpo nero è strettamente legata alla sua temperatura dalla legge di Stefan-Boltzmann, quando la linea di vista è diretta verso il centro della stella (e quindi arriva ad una maggiore profondità), vedremo la radiazione emessa da uno strato di gas più caldo, e quindi più luminoso.

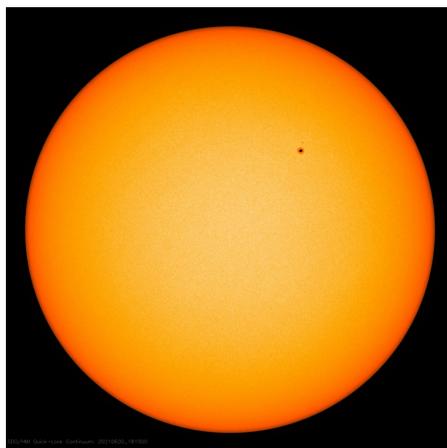
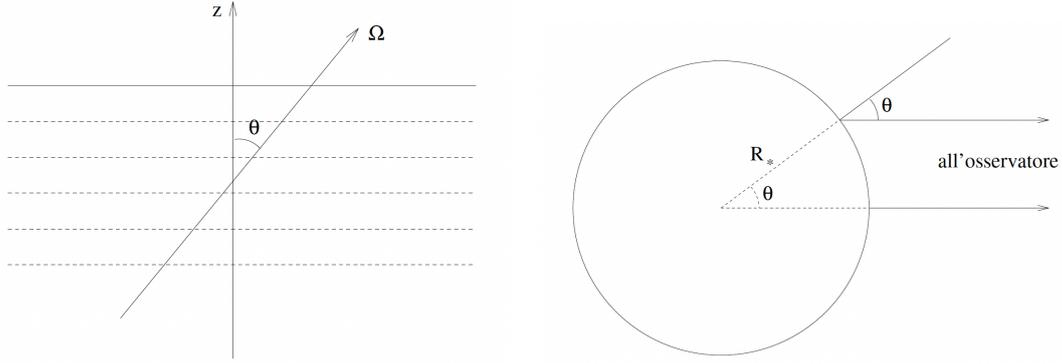


Figura 13: Immagine del Sole in cui si osserva una minore intensità luminosa proveniente dalle regioni periferiche del disco solare. Questa immagine è datata 20 Giugno 2021 e proviene dal telescopio SDO.

Si può calcolare l'effetto di limb darkening attraverso l'intensità che emerge dalla stella al variare dell'angolo formato con la linea di vista. Per semplificare si utilizzano delle approssimazioni che rendono possibile ottenere dei risultati analitici validi come approssimazione di ordine zero. La prima approssimazione è quella dell'atmosfera piana: si trascura la curvatura degli strati superficiali della stella dovuta alla sua forma sferica. Ciò è lecito in quanto lo spessore H dell'atmosfera è molto minore del raggio R della stella (nel caso del Sole il loro rapporto è circa pari a $\frac{H}{R_{\odot}} \simeq 1.4 \cdot 10^{-3}$).

Si suppone anche che le proprietà fisiche dell'atmosfera dipendano solo dalla quota z e non dalle altre coordinate x e y . In questo modo il campo di radiazione dipende esclusivamente dalla quota z e dall'angolo eliocentrico θ , definiti come in figura 14. Quindi si considera un'atmosfera piano-parallela.



(a) Schematizzazione di un'atmosfera piano-parallelata nella quale le proprietà fisiche dipendono solo dalla quota z e il campo di radiazione solo da z e dall'angolo eliocentrico θ .
 (b) La radiazione emessa dall'elemento di superficie stellare individuato dall'angolo al centro θ è inclinata dello stesso angolo rispetto alla verticale.

Figura 14

Considerando l'intensità specifica della radiazione $I_\nu(z, \mu)$ che si propaga nella direzione individuata dall'angolo θ con $\mu = \cos\theta$, l'equazione del trasporto radiativo è:

$$\mu \frac{dI_\nu(z, \mu)}{dz} = -k_\nu [I_\nu(z, \mu) - S_\nu] \quad (12)$$

dove S_ν è la funzione sorgente alla frequenza ν . Sotto l'ipotesi di Equilibrio Termico Locale, cioè assumendo che il mezzo materiale con cui interagisce il campo di radiazione si trovi all'equilibrio termodinamico, l'equazione diventa:

$$\mu \frac{dI_\nu(z, \mu)}{dz} = -k_\nu [I_\nu(z, \mu) - B_\nu] \quad (13)$$

dove B_ν è la funzione di Planck. L'equazione può essere risolta introducendo la profondità ottica specifica τ_ν definita dalla relazione:

$$d\tau_\nu = -k_\nu dz \quad (14)$$

ottenendo quindi:

$$I_\nu(0, \mu) = \int_0^\infty B_\nu e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}} \frac{d\tau_\nu}{\mu} \quad (15)$$

Per ricavare dei risultati qualitativi si può approssimare l'espressione ottenuta supponendo che la funzione di Planck abbia un andamento lineare con τ_ν :

$$B_\nu(\tau_\nu) = a_\nu + b_\nu \tau_\nu \quad (16)$$

da cui:

$$I_\nu(0, \mu) = a_\nu + b_\nu \tau_\nu = B_\nu(\tau_\nu = \mu) \quad (17)$$

Con l'approssimazione di Eddington-Barbier si suppone che l'espressione appena trovata abbia validità generale e quindi non solo nel caso in cui la funzione di Planck dipende linearmente da τ_ν . Allora:

$$I_\nu(0, \mu) \simeq B_\nu(\tau_\nu = \mu) \quad (18)$$

Considerando la temperatura come funzione della quota geometrica z , allora per determinare l'intensità del campo di radiazione attraverso l'approssimazione di Eddington-Barbier occorre calcolare la quota \tilde{z} alla quale $\tau_\nu = \mu$ ottenendo:

$$I_\nu(0, \mu) \simeq B_\nu(T(\tilde{z})) \quad (19)$$

Dato che la temperatura in generale decresce con z ci si aspetta che, a frequenza fissata, l'intensità emessa sia maggiore al centro ($\mu = 1$) rispetto al bordo ($\mu \rightarrow 0$): ciò comporta l'oscuramento al bordo.

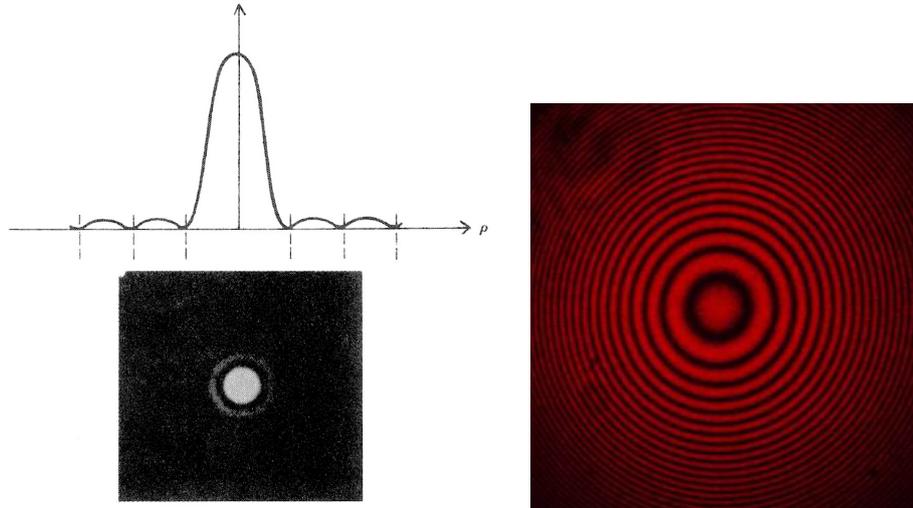
Dal punto di vista sperimentale non è stato possibile misurare l'effetto del limb darkening e isolarlo rispetto alla penombra e, di conseguenza, non è stato considerato in fase di analisi dati.

Diffrazione La diffrazione è un fenomeno fisico associato alla propagazione delle onde: in accordo col principio di Huygens-Fresnel, quando la luce attraversa una fenditura, ogni punto della fenditura si comporta come se fosse a sua volta una sorgente di onde circolari; queste onde interagiscono tra loro tramite il fenomeno dell'interferenza. La diffrazione è l'interferenza tra le diverse parti dell'onda che avviene dopo che questa incontra un ostacolo. L'intensità luminosa percepita dipende dalla forma della fenditura e dal punto dello schermo dove l'immagine viene proiettata. Gli effetti della diffrazione sono tanto più rilevanti quanto le dimensioni dell'ostacolo o della fenditura che l'onda incontra sono comparabili (o minori) rispetto alla sua lunghezza d'onda.

Nel caso della Gnomone Clementino si può considerare la diffrazione in regime di Fraunhofer grazie alla grande distanza tra la sorgente e il foro stenopeico e tra il foro e la meridiana, ossia si possono considerare le onde in entrata e in uscita dal foro come onde piane. Quest'ultimo è una fenditura circolare: il pattern di diffrazione consiste in un disco centrale luminoso, chiamato disco di Airy (che si estende fino al primo anello scuro) circondato da cerchi concentrici di intensità decrescente intervallati da zone d'ombra. La distanza angolare a cui si trova il primo minimo della funzione, ossia la prima zona d'ombra, è data per piccoli angoli dalla formula:

$$\theta \simeq 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (20)$$

dove λ è la lunghezza d'onda della radiazione incidente e D è il diametro del foro stenopeico.



(a) *Pattern di diffrazione in regime di Fraunhofer ottenuto da un'apertura circolare*

(b) *Disco di Airy ottenuto dalla diffrazione attraverso una fenditura circolare di un fascio di luce monocromatica*

Figura 15

Il profilo d'intensità per la luce diffratta dipende dalle funzioni di Bessel relazionate al raggio della fenditura circolare: più è piccola l'apertura e più è grande la dispersione delle onde a parità di distanza.

Considerando una temperatura superficiale del Sole 5700 K si ottiene una lunghezza d'onda di massima emissione pari a $\lambda \simeq 500\text{ nm}$, da cui $\theta \simeq 2 \cdot 10^{-5}\text{ rad}$. Questo angolo, proiettato su schermi via via più distanti, produce un pattern sempre più ampio.

Occorre considerare che la radiazione in ingresso non è coerente, ossia non giunge al foro stenopeico tutta con la stessa fase: infatti la luce che arriva è il prodotto di tanti emettitori a frequenza e fase diversa, e non è monocromatica. In aggiunta a ciò, il foro presenta delle irregolarità ed ha uno spessore di 6.11 mm , che provoca un effetto ombra non trascurabile e che diventa totale a circa 70° dallo zenit.

L'effetto di allargamento per diffrazione non è stato tenuto in considerazione in fase di analisi dati dal momento che viene celato dal Limb Darkening.

6 Misura dei tempi di transito sulla meridiana

Per ricavare il diametro solare si è innanzitutto stimato il tempo Δt che intercorre tra il contatto dei lembi precedente e seguente con la linea meridiana, come già spiegato nel capitolo 4, disponendo in alcune misure anche di altre linee parallele con cui poter fare una media ed ottenere un valore più preciso. Nella tabella che segue sono riportati i valori ottenuti e l'orario del transito solare ricavato.

Data	Δt [s]	Incertezza [s]
04/09/2019	132.7	± 0.2
08/09/2019	132.3	± 0.3
29/09/2019	132.4	± 0.4
21/10/2019	132.5	± 0.4
22/10/2019	136.3	± 0.3
01/12/2019	143.7	± 0.4
10/12/2019	145.2	± 0.3
15/12/2019	143.5	± 0.4
25/12/2019	144.3	± 0.4
28/12/2019	144.9	± 0.3
29/12/2019	145.2	± 0.4
31/12/2019	144.9	± 0.4
01/01/2020	143.3	± 0.4
02/01/2020	144.8	± 0.3
03/01/2020	144.9	± 0.3
04/01/2020	144.7	± 0.3
05/01/2020	144.9	± 0.4
11/01/2020	144.3	± 0.3
22/01/2020	141.5	± 0.3
23/01/2020	139.6	± 0.3
27/01/2020	139.5	± 0.2
30/01/2020	141.5	± 0.3
06/02/2020	139.9	± 0.3
07/02/2020	137.1	± 0.3
14/02/2020	138.7	± 0.2
15/02/2020	136.9	± 0.2
16/02/2020	137.4	± 0.3
21/02/2020	135.6	± 0.4
22/02/2020	135.8	± 0.2
23/02/2020	132.8	± 0.4
12/03/2020	132.4	± 0.2
08/05/2020	140.6	± 0.2
17/05/2020	140.5	± 0.4

Tabella 3: Calcolo del tempo che il Sole impiega a percorrere la linea meridiana.

Per calcolare le incertezze si è effettuata la propagazione degli errori tenendo conto dell'errore relativo alla turbolenza che è stato quantificato essere di $0.5 s$, del ritardo che l'orologio utilizzato accumula durante la mattinata, dopo essersi sincronizzato a mezzanotte, di circa $0.05 s$ e della sincronizzazione eseguita tramite *Quick Time Player*; quest'ultimo può essere trascurato in fase di analisi dati poiché molto più piccolo di quelli precedentemente elencati. Le misure più precise, cioè quelle con un'incertezza minore, sono state ricavate utilizzando un foglio di carta con disegnate alcune linee parallele alla

linea meridiana in modo da aver un maggior numero di prese dati. Dopo aver stimato il Δt è stato possibile stimare il diametro angolare del Sole in *arcsec* utilizzando la formula:

$$\delta' = \Delta t \cdot 15 \cdot \cos(d) \quad (21)$$

dove d rappresenta la declinazione del Sole e $15 \cdot \cos(d)$ rappresenta la velocità angolare del Sole espressa in *arcsec/s*. La declinazione d del Sole è stata ricavata tramite i siti *Calsky* e *Stellarium*, utilizzando il tempo di transito e le coordinate in latitudine e in longitudine del luogo.

A questo punto è stato possibile ricavare il diametro angolare reale del Sole sottraendo a δ' il valore della penombra, come già anticipato nei capitoli precedenti. Per la stima della penombra è stato necessario stimare l'angolo zenitale z , che a Roma varia tra circa 65.5° al solstizio d'inverno e 18.6° al solstizio d'estate:

$$z = l - d \quad (22)$$

dove l indica la latitudine del luogo, che nel nostro caso è: $l = 41^\circ 54' 11.2''$ N.

L'angolo zenitale trovato è stato successivamente corretto utilizzando la formula 7 tenendo in considerazione la rifrazione atmosferica.

Utilizzando poi le formule 8, 9, 10 sopra descritte per la stima del diametro efficace, della distanza foro-immagine e della penombra, è stato possibile ricavare il diametro angolare reale del Sole utilizzando la formula 11. Si riportano nella tabella sottostante rispettivamente i valori dell'angolo zenitale, della penombra e del diametro angolare reale⁵:

⁵Il diametro angolare solare reale è stato ottenuto da questo sito: <https://www.astronomiamo.it/StrumentiAstronomici/Effemeridi-Calcoli-Sole>

Data	z [°]	Penombra [arcsec]	Diametro ang. stimato [arcsec]	Diametro ang. reale [arcsec]
04/09/2019	34.7	173.0	1874.6 ± 2.3	1903.0
08/09/2019	32.6	167.9	1882.2 ± 3.1	1904.9
29/09/2019	43.5	141.2	1844.2 ± 5.4	1915.8
21/10/2019	51.2	110.5	1895.9 ± 5.3	1927.9
22/10/2019	52.9	103.2	1903.3 ± 3.0	1928.4
01/12/2019	62.1	63.8	1959.1 ± 5.0	1946.3
10/12/2019	64.8	51.7	1952.2 ± 4.0	1948.8
15/12/2019	64.7	52.6	1932.1 ± 4.9	1949.9
25/12/2019	64.5	53.2	1945.1 ± 4.9	1951.4
28/12/2019	65.2	50.0	1946.7 ± 4.0	1951.7
29/12/2019	64.7	52.4	1956.4 ± 4.9	1951.7
31/12/2019	64.8	51.9	1950.4 ± 4.9	1951.8
01/01/2020	64.9	51.5	1927.5 ± 4.9	1951.9
02/01/2020	64.9	51.6	1948.9 ± 4.0	1951.9
03/01/2020	63.1	59.6	1961.5 ± 4.1	1951.9
04/01/2020	64.7	52.4	1949.8 ± 4.0	1951.9
05/01/2020	63.3	58.7	1959.6 ± 5.0	1951.9
11/01/2020	62.1	64.1	1968.0 ± 4.1	1951.6
22/01/2020	61.7	65.7	1932.1 ± 4.1	1950.2
23/01/2020	60.4	71.4	1914.6 ± 4.1	1950.0
27/01/2020	59.4	75.8	1920.2 ± 3.2	1949.2
30/01/2020	59.7	74.6	1946.6 ± 3.2	1948.5
06/02/2020	57.6	83.4	1937.7 ± 4.2	1946.5
07/02/2020	56.5	88.2	1901.9 ± 3.7	1946.1
15/02/2020	53.1	102.5	1911.7 ± 2.3	1943.3
16/02/2020	54.4	97.4	1915.6 ± 4.3	1942.9
21/02/2020	51.2	110.4	1896.7 ± 5.3	1940.9
23/02/2020	50.0	115.6	1899.7 ± 5.3	1940.0
12/03/2020	45.0	135.6	1908.5 ± 2.4	1931.3

Tabella 4: Angolo zenitale, penombra, diametro angolare stimato e diametro angolare reale.

Nella figura che segue sono stati riportati il diametro angolare misurato e quello ricavato dalle effemeridi in funzione del tempo.

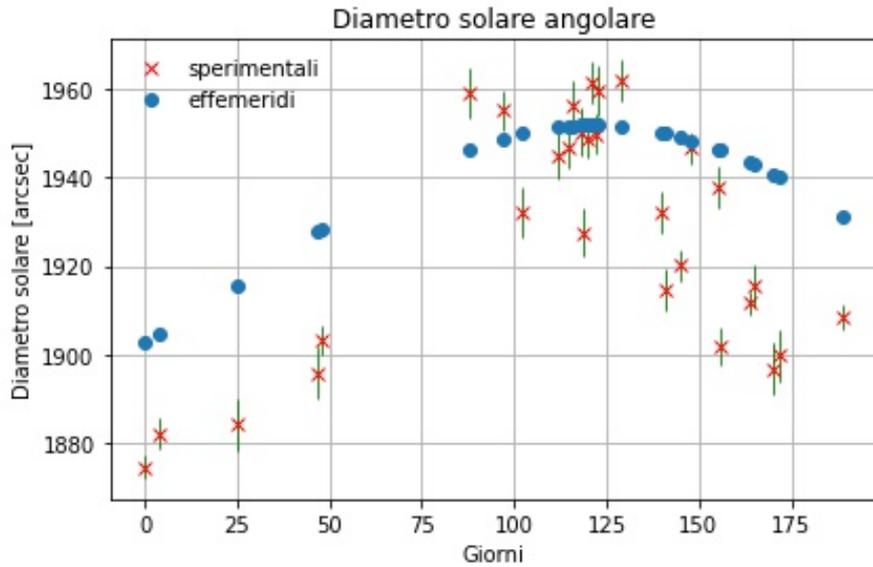


Figura 16: Confronto tra diametro solare angolare ricavato dalle misure in Basilica e quello stimato dalle effemeridi.

Confrontando il diametro angolare misurato con quello ricavato tramite le Effemeridi, si può notare che alcuni valori di diametro misurati, ossia quelli in cui la penombra è calcolata è maggiore, si discostano molto da quelli reali. Ciò infatti è dovuto una sovrastima della penombra, principalmente causata dalla scarsa qualità delle immagini dei video in quelle date o a condizioni meteo poco favorevoli: infatti se il cielo è blu o cobalto, l'immagine solare sulla linea appare ben contrastata e quindi si riesce a distinguere bene il suo bordo; quando invece c'è una lattiginosità nel cielo, il bordo dell'immagine non risulta più netto e quindi la penombra appare più larga di quel che è in realtà.

Un'altra possibilità di causa della discrepanza tra valori misurati e aspettati è che l'effetto del Limb Darkening abbia portato a scambiare le parti esterne del disco oscurate con la penombra, e sono quindi state rimosse erroneamente. Inoltre il contorno della figura risulta continuamente mosso e sfumato per effetto di seeing e turbolenza. A ciò si aggiunge l'irregolarità della forma del foro ed anche la sensibilità dell'occhio umano che, in condizione di poco di immagine solare poco contrastata rispetto all'ambiente circostante, non è in grado di distinguere bene le parti più esterne della regione di penombra. Si riporta come esempio un frame del video del 22/10/2019. In questa data si è calcolata una penombra pari a 103.2 arcsec , un diametro angolare pari a $1903.3 \pm 3.0 \text{ arcsec}$ mentre il diametro angolare reale è di 1928.4 arcsec .

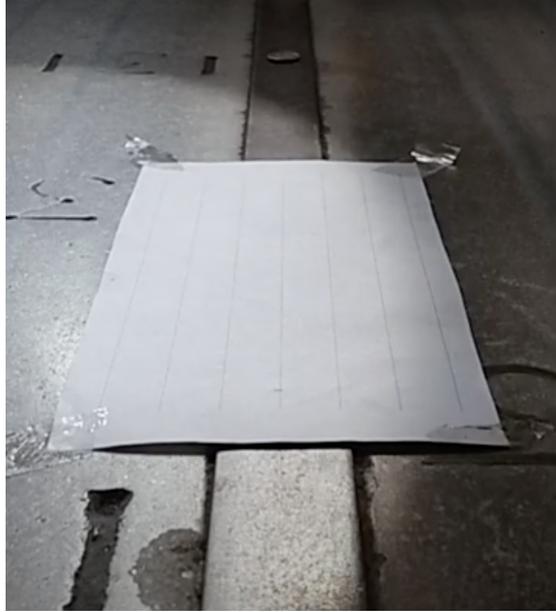


Figura 17: Immagine solare sulla linea meridiana del giorno 22/10/2019.

Si può notare come il bordo dell'immagine solare non sia distinguibile e quindi, nonostante siano state utilizzate più linee parallele per ottenere una misura più precisa, il risultato ottenuto è poco soddisfacente.

Si è quindi ricalcolata la penombra per verificare la sovrastima della penombra precedente. La nuova penombra è stata calcolata sottraendo al diametro angolare misurato, a cui non è stata tolta alcuna penombra (quindi pari a $2006.5 \pm 3.0 \text{ arcsec}$), il diametro angolare reale. La penombra ottenuta in questo modo è di 78.1 arcsec , e quindi più piccola della precedente.

Per dare una stima quantitativa del diametro angolare solare è stata effettuata una media dei moduli delle differenze tra diametri angolari solari ottenuti dalle effemeridi δ^* e quelli stimati dalle misure in Basilica δ . I risultati ottenuti sono i seguenti:

$$|\overline{\delta^* - \delta}| = 19.0 \pm 4.3 \text{ arcsec} \quad (23)$$

Risulta evidente che la differenza tra le misure e i valori attesi è lontana dall'annullarsi e non è compatibile con lo zero. Questo ci fa affermare che i risultati ottenuti non sono compatibili con quelli aspettati per le motivazioni elencate precedentemente.

Si è quindi deciso di studiare la variazione della media degli scarti della formula 23 in funzione della penombra geometrica sottratta al diametro angolare misurato. Nello specifico si è utilizzata la seguente formula:

$$D' = D - \Delta \cdot P \quad (24)$$

considerando D il diametro angolare misurato tramite la formula 21, P il valore della penombra geometrica i cui valori sono riportati nella Tabella 4 e Δ è un parametro fatto variare tra 0.5 e 1. Per ogni valore di Δ sono stati confrontati i valori di D' con i valori del diametro angolare calcolati dalle Effemeridi e si è poi calcolata la media degli scarti. L'andamento ottenuto è il seguente:

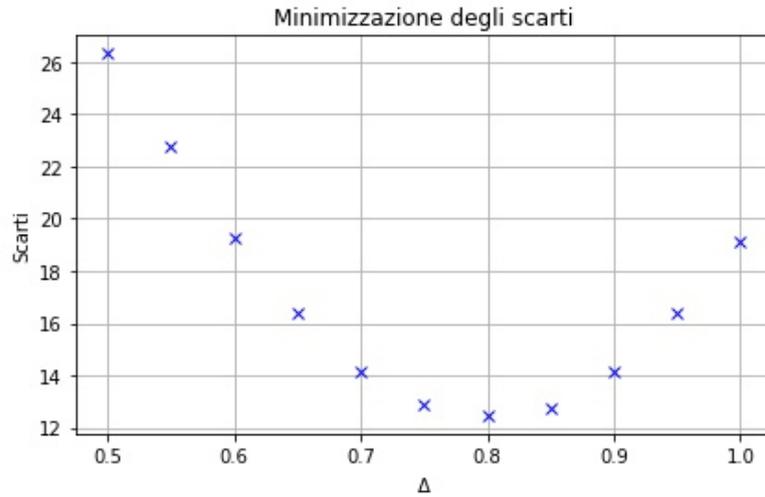


Figura 18: Media degli scarti in funzione del parametro Δ . Il parametro Δ è stato fatto variare da 0.5 a 1 con variazioni di 0.05.

Dal grafico si evince che il valore di Δ che minimizza la media tra gli scarti è $\Delta = 0.8$. Questo ci suggerisce che per calcolare il diametro angolare solare reale non bisogna sottrarre l'intero raggio del foro stenopeico al diametro angolare misurato ma solamente una frazione $\Delta = 0.8$.

Utilizzando un valore $\Delta = 0.8$ si ottiene un valore:

$$|\overline{\delta^* - \delta}| = 12.4 \pm 4.3 \text{ arcsec} \quad (25)$$

6.1 Equazione del tempo e stima dell'orario di transito

L'equazione del tempo è una quantità variabile che, se aggiunta al mezzogiorno, dà l'istante del mezzodì, ossia il momento in cui il Sole raggiunge il punto più alto della sua orbita giornaliera che corrisponde approssimativamente anche all'istante intermedio tra alba e tramonto, perciò il nome "mezzodì".

Infatti la durata del giorno solare, cioè il tempo che intercorre tra due passaggi del Sole in meridiano in una stessa località, non è costante nel corso dell'anno ed è proprio per questo motivo che è stato introdotto il giorno solare medio che ha durata costante di 24 ore.

L'equazione del tempo è una grandezza integrale che quindi rappresenta l'accumulo di anticipi e ritardi dovuti alla differenza tra giorno solare vero e giorno solare medio ed è uguale per tutte le località della Terra. Il ritardo/anticipo massimo che si può accumulare nel corso dell'anno è circa di 16 minuti.

$$\text{Equazione del tempo} = \text{giorno solare medio} - \text{giorno solare vero} \quad (26)$$

L'equazione del tempo è la conseguenza dell'azione combinata dell'inclinazione dell'asse terrestre e dell'eccentricità dell'orbita. Infatti l'orbita terrestre non è circolare ma ellittica, con eccentricità pari a $e = 0.0167086$. Quindi, come conseguenza della seconda legge di Keplero, l'orbita non viene percorsa con velocità uniforme: quando la Terra si trova in corrispondenza del perielio (circa 13 giorni dopo il solstizio d'inverno) si muove più velocemente ed il giorno solare vero risulta più lungo; quando si trova in corrispondenza dell'afelio (circa due settimane dopo il solstizio d'estate) si muove più lentamente ed il giorno solare vero risulta più corto. Questa fluttuazione ha un'ampiezza di $2 \times 6,67$ minuti ed un periodo di 365,25 giorni.

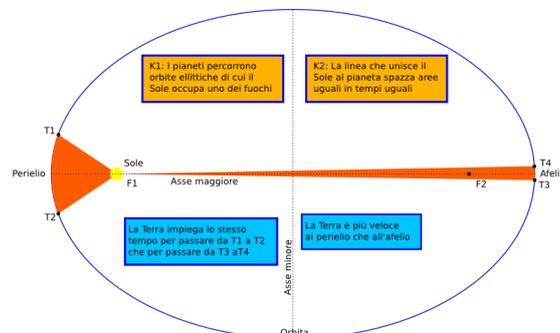


Figura 19: Orbita terrestre. L'immagine rappresenta un'orbita con eccentricità esagerata rispetto a quella reale in modo da evidenziare la seconda legge di Keplero.

Inoltre occorre considerare che l'orbita terrestre non coincide con l'equatore celeste ma è inclinata di $23^{\circ}27'$ e questo comporta che un osservatore sulla Terra, durante l'anno, vede il Sole allontanarsi dall'orizzonte e salire fino a circa $23,45^{\circ}$ sopra l'equatore celeste, per poi ridiscendere fino a circa $-23,45^{\circ}$ dall'equatore celeste, verso l'orizzonte. Se si studia la variazione della componente 'equatoriale' della velocità orbitale della Terra, si osserva che essa raggiunge un valore massimo in corrispondenza dei solstizi, perché il vettore velocità risulta parallelo al piano equatoriale, mentre raggiunge un valore minimo in corrispondenza degli equinozi, perché il vettore velocità è inclinato di $23,45^{\circ}$ circa rispetto al piano equatoriale. Questa seconda fluttuazione ha approssimativamente un'ampiezza di $2 \times 9,87$ minuti ed un periodo di 182,12 giorni.

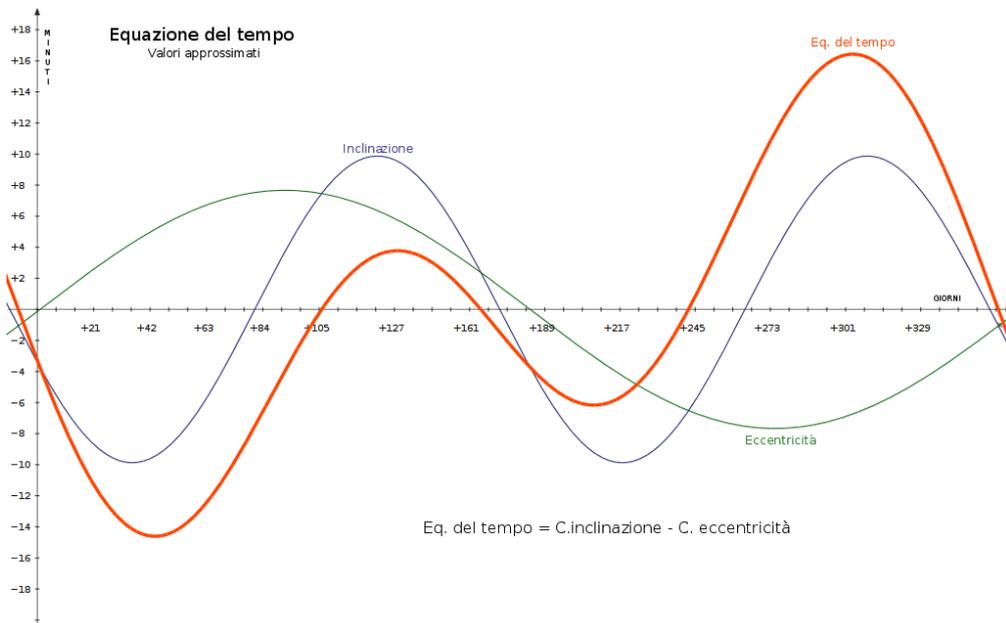


Figura 20: Equazione del tempo ottenuta dalla combinazione dei due effetti (la componente dovuta all'eccentricità dell'orbita e quella dovuta alla sua inclinazione): si ottiene una buona approssimazione dell'anticipo o del ritardo del Sole vero rispetto a quello medio

La rappresentazione visiva dell'equazione del tempo è l'*analemma*, che descrive la posizione del Sole alla stessa ora e nello stesso luogo nel corso dell'anno:

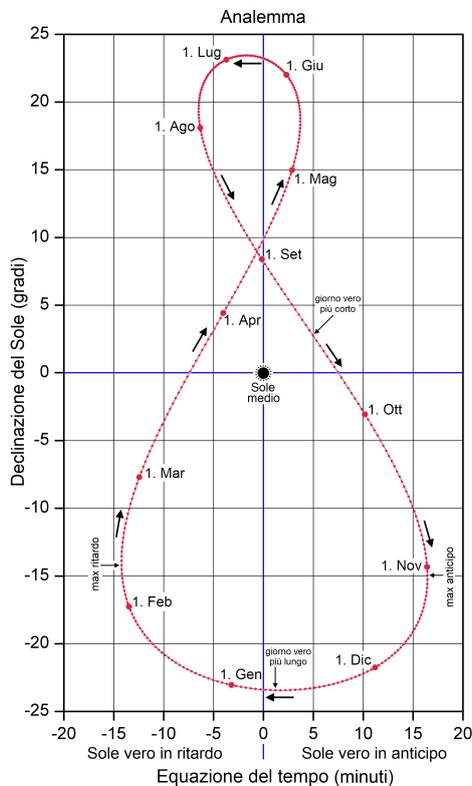


Figura 21: Analemma Terrestre. In figura sono indicati in ordinata i diversi valori di declinazione che il Sole assume per ogni giorno dell'anno, e in ascissa i corrispondenti minuti in anticipo o in ritardo dell'ora solare vera rispetto a quella locale.

Come ci si aspetta l'anello inferiore dell'analemma risulta più ampio di quello superiore perché la velocità orbitale Terrestre è minore in corrispondenza dei mesi invernali. Inoltre nell'emisfero settentrionale del pianeta il vertice superiore dell'analemma coincide con il solstizio d'estate mentre il vertice inferiore coincide con il solstizio di inverno, e la distanza angolare che separa la posizione del Sole nei due solstizi è pari a poco meno di 47°, che equivale esattamente al doppio dell'inclinazione dell'asse terrestre. Se l'orbita terrestre fosse perfettamente circolare centrata attorno al Sole e l'asse terrestre fosse perpendicolare all'orbita, il Sole apparirebbe sempre nella stessa posizione ogni giorno alla stessa ora e non si avrebbe alcun analemma, o meglio sarebbe puntiforme. Se l'orbita fosse circolare ma l'asse inclinato, i due lobi della figura sarebbero simmetrici. Infine, se l'asse non fosse inclinato ma l'orbita fosse ellittica l'analemma sarebbe costituito da un segmento rettilineo in senso est-ovest.

Dal momento che il valore dell'equazione del tempo è variabile, viene tabulato giorno per giorno e quello dell'anno 2007 è riportato nelle tabelle che seguono.

**Equazione del Tempo
espressa in minuti
(anno 2007)**

01-gen	3.4
02-gen	3.9
03-gen	4.3
04-gen	4.8
05-gen	5.2
06-gen	5.7
07-gen	6.1
08-gen	6.6
09-gen	7.0
10-gen	7.4
11-gen	7.8
12-gen	8.2
13-gen	8.6
14-gen	8.9
15-gen	9.3
16-gen	9.6
17-gen	10.0
18-gen	10.3
19-gen	10.6
20-gen	10.9
21-gen	11.2

22-gen	11.5
23-gen	11.8
24-gen	12.0
25-gen	12.3
26-gen	12.5
27-gen	12.7
28-gen	12.9
29-gen	13.1
30-gen	13.2
31-gen	13.4
01-feb	13.5
02-feb	13.7
03-feb	13.8
04-feb	13.9
05-feb	14.0
06-feb	14.0
07-feb	14.1
08-feb	14.2
09-feb	14.2
10-feb	14.2
11-feb	14.2
12-feb	14.2
13-feb	14.2
14-feb	14.2
15-feb	14.1

16-feb	14.1
17-feb	14.0
18-feb	14.0
19-feb	13.9
20-feb	13.8
21-feb	13.7
22-feb	13.5
23-feb	13.4
24-feb	13.3
25-feb	13.1
26-feb	13.0
27-feb	12.8
28-feb	12.6
01-mar	12.4
02-mar	12.2
03-mar	12.0
04-mar	11.8
05-mar	11.6
06-mar	11.4
07-mar	11.1
08-mar	10.9
09-mar	10.6
10-mar	10.4
11-mar	10.1
12-mar	9.9
13-mar	9.6
14-mar	9.3
15-mar	9.0
16-mar	8.8
17-mar	8.5

18-mar	8.2
19-mar	7.9
20-mar	7.6
21-mar	7.3
22-mar	7.0
23-mar	6.7
24-mar	6.4
25-mar	6.1
26-mar	5.8
27-mar	5.5
28-mar	5.2
29-mar	4.9
30-mar	4.6
31-mar	4.3
01-apr	4.0
02-apr	3.7
03-apr	3.4
04-apr	3.1
05-apr	2.8
06-apr	2.5
07-apr	2.2
08-apr	2.0
09-apr	1.7
10-apr	1.4
11-apr	1.1
12-apr	0.9
13-apr	0.6
14-apr	0.4
15-apr	0.1
16-apr	-0.1

17-apr	-0.3
18-apr	-0.6
19-apr	-0.8
20-apr	-1.0
21-apr	-1.2
22-apr	-1.4
23-apr	-1.6
24-apr	-1.8
25-apr	-2.0
26-apr	-2.1
27-apr	-2.3
28-apr	-2.4
29-apr	-2.6
30-apr	-2.7
01-mag	-2.9
02-mag	-3.0
03-mag	-3.1
04-mag	-3.2
05-mag	-3.3
06-mag	-3.4
07-mag	-3.4
08-mag	-3.5
09-mag	-3.6
10-mag	-3.6
11-mag	-3.6
12-mag	-3.7
13-mag	-3.7
14-mag	-3.7
15-mag	-3.7
16-mag	-3.7

17-mag	-3.6
18-mag	-3.6
19-mag	-3.6
20-mag	-3.5
21-mag	-3.4
22-mag	-3.4
23-mag	-3.3
24-mag	-3.2
25-mag	-3.1
26-mag	-3.0
27-mag	-2.9
28-mag	-2.8
29-mag	-2.7
30-mag	-2.5
31-mag	-2.4
01-giu	-2.2
02-giu	-2.1
03-giu	-1.9
04-giu	-1.8
05-giu	-1.6
06-giu	-1.4
07-giu	-1.2
08-giu	-1.0
09-giu	-0.8
10-giu	-0.7
11-giu	-0.4
12-giu	-0.2
13-giu	0.0
14-giu	0.2
15-giu	0.4

16-giu	0.6
17-giu	0.8
18-giu	1.0
19-giu	1.3
20-giu	1.5
21-giu	1.7
22-giu	1.9
23-giu	2.1
24-giu	2.3
25-giu	2.6
26-giu	2.8
27-giu	3.0
28-giu	3.2
29-giu	3.4
30-giu	3.6
01-lug	3.8
02-lug	4.0
03-lug	4.2
04-lug	4.3
05-lug	4.5
06-lug	4.7
07-lug	4.8
08-lug	5.0
09-lug	5.2
10-lug	5.3
11-lug	5.4
12-lug	5.6
13-lug	5.7
14-lug	5.8
15-lug	5.9

16-lug	6.0
17-lug	6.1
18-lug	6.2
19-lug	6.3
20-lug	6.3
21-lug	6.4
22-lug	6.4
23-lug	6.5
24-lug	6.5
25-lug	6.5
26-lug	6.5
27-lug	6.5
28-lug	6.5
29-lug	6.5
30-lug	6.4
31-lug	6.4
01-ago	6.3
02-ago	6.3
03-ago	6.2
04-ago	6.1
05-ago	6.0
06-ago	5.9
07-ago	5.8
08-ago	5.7
09-ago	5.5
10-ago	5.4
11-ago	5.3
12-ago	5.1
13-ago	4.9
14-ago	4.7

15-ago	4.6
16-ago	4.4
17-ago	4.1
18-ago	3.9
19-ago	3.7
20-ago	3.5
21-ago	3.2
22-ago	3.0
23-ago	2.7
24-ago	2.5
25-ago	2.2
26-ago	1.9
27-ago	1.6
28-ago	1.3
29-ago	1.0
30-ago	0.7
31-ago	0.4
01-set	0.1
02-set	-0.2
03-set	-0.5
04-set	-0.9
05-set	-1.2
06-set	-1.5
07-set	-1.9
08-set	-2.2
09-set	-2.6
10-set	-2.9
11-set	-3.2
12-set	-3.6
13-set	-3.9

14-set	-4.3
15-set	-4.7
16-set	-5.0
17-set	-5.4
18-set	-5.7
19-set	-6.1
20-set	-6.4
21-set	-6.8
22-set	-7.1
23-set	-7.5
24-set	-7.9
25-set	-8.2
26-set	-8.5
27-set	-8.9
28-set	-9.2
29-set	-9.6
30-set	-9.9
01-ott	-10.2
02-ott	-10.5
03-ott	-10.9
04-ott	-11.2
05-ott	-11.5
06-ott	-11.8
07-ott	-12.1
08-ott	-12.4
09-ott	-12.6
10-ott	-12.9
11-ott	-13.2
12-ott	-13.4
13-ott	-13.7

14-ott	-13.9
15-ott	-14.1
16-ott	-14.4
17-ott	-14.6
18-ott	-14.8
19-ott	-15.0
20-ott	-15.1
21-ott	-15.3
22-ott	-15.5
23-ott	-15.6
24-ott	-15.8
25-ott	-15.9
26-ott	-16.0
27-ott	-16.1
28-ott	-16.2
29-ott	-16.3
30-ott	-16.3
31-ott	-16.4
01-nov	-16.4
02-nov	-16.4
03-nov	-16.4
04-nov	-16.4
05-nov	-16.4
06-nov	-16.4
07-nov	-16.3
08-nov	-16.3
09-nov	-16.2
10-nov	-16.1
11-nov	-16.0
12-nov	-15.9

13-nov	-15.8
14-nov	-15.6
15-nov	-15.5
16-nov	-15.3
17-nov	-15.1
18-nov	-14.9
19-nov	-14.7
20-nov	-14.5
21-nov	-14.2
22-nov	-14.0
23-nov	-13.7
24-nov	-13.4
25-nov	-13.1
26-nov	-12.8
27-nov	-12.5
28-nov	-12.2
29-nov	-11.8
30-nov	-11.5
01-dic	-11.1
02-dic	-10.7
03-dic	-10.4
04-dic	-10.0
05-dic	-9.6
06-dic	-9.1
07-dic	-8.7
08-dic	-8.3
09-dic	-7.8
10-dic	-7.4
11-dic	-6.9
12-dic	-6.5

13-dic	-6.0
14-dic	-5.5
15-dic	-5.0
16-dic	-4.6
17-dic	-4.1
18-dic	-3.6
19-dic	-3.1
20-dic	-2.6
21-dic	-2.1
22-dic	-1.6
23-dic	-1.1
24-dic	-0.6
25-dic	-0.1
26-dic	0.4
27-dic	0.9
28-dic	1.4
29-dic	1.9
30-dic	2.3

31-dic	2.8
01-gen	3.3

Figura 22: Equazione del tempo espressa in minuti. Anno 2007.

Si nota che l'equazione del tempo del 01/01/2008 differisce di 0.1 minuti = 6 secondi da quella del 01/01/2007: ciò accade perché il Sole dopo 365 giorni non è esattamente nella stessa posizione dell'anno prima. Si è comunque deciso di fare riferimento a questa tabella per la stima del tempo di transito perché risulta sufficientemente accurata.

Per stimare l'ora del mezzogiorno locale bisogna effettuare un'ulteriore correzione, oltre l'equazione del tempo, detta correzione in longitudine. Questo termine correttivo dipende dalla longitudine a cui si trova l'osservatore: nel caso di Roma la longitudine è 12.5° Est, che corrisponde a 50 minuti di anticipo sul transito meridiano: quindi il mezzogiorno medio è alle ore 12.10.

Si può ottenere l'ora del mezzogiorno locale dalla relazione:

$$\text{Ora orologio} = 12.00 \pm \text{equazione del tempo} \pm \text{correzione in longitudine} \quad (27)$$

Nella tabella e nei rispettivi grafici sottostanti riportiamo sia i valori del mezzogiorno locale ottenuti utilizzando la formula 27 e quindi le tabelle soprastanti per l'equazione del tempo e la correzione in latitudine appena citata sia l'orario del transito stimato mediante le misure effettuate in Basilica.

Per quanto riguarda la procedura per stimare l'orario del mezzogiorno locale in Basilica si è valutato il tempo impiegato dal Sole ad attraversare la linea meridiana Δt , analizzando i video tramite il programma *Quick Time Player* e, a seguito di una sincronizzazione tra l'orologio utilizzato per la presa dati che segnava l'orario istante per istante e il video effettuato, si è stimato l'orario di transito del Sole.

Nella valutazione dell'incertezza è stato preso in considerazione l'incertezza legata alla turbolenza che risulta essere 0.5 s, l'incertezza legata alla sincronizzazione di 0.03 s e il ritardo dell'orologio accumulato fino all'istante del transito di 0.05 s. Per quanto riguarda invece l'incertezza sul mezzogiorno locale invece ci si è accorti dalle tabelle soprastanti che arrivano ad una precisione di 0.1 minuti e quindi di 6 s.

Data	Orario del transito (± 0.35 s)	Mezzogiorno locale (± 6 s)
04/09/2019	13.09.21, 01	13.09.06
08/09/2019	13.08.01, 07	13.07.48
29/09/2019	13.00.40, 15	13.00.24
21/10/2019	12.54.54, 34	12.54.42
22/10/2019	12.54.46, 33	12.54.30
01/12/2019	11.59.13, 16	11.58.54
10/12/2019	12.02.49, 31	12.02.36
15/12/2019	12.04.58, 33	12.05.00
25/12/2019	12.10.16, 56	12.09.54
28/12/2019	12.11.45, 12	12.11.24
31/12/2019	12.13.11, 25	12.12.48
01/01/2020	12.13.39, 49	12.13.24
02/01/2020	12.13.09, 94	12.13.54
03/01/2020	12.14.37, 27	12.14.18
04/01/2020	12.15.05, 17	12.14.48
05/01/2020	12.15.29, 48	12.15.12
11/01/2020	12.18.03, 67	12.17.48
22/01/2020	12.21.44, 41	12.21.30
23/01/2020	12.22.00, 77	12.21.48
27/01/2020	12.22.57, 11	12.22.42
30/01/2020	12.23.30, 93	12.23.12
06/02/2020	12.24.20, 95	12.24.00
07/02/2020	12.24.23, 61	12.24.06
14/02/2020	12.24.28, 13	12.24.12
15/02/2020	12.24.25, 98	12.24.06
16/02/2020	12.24.23, 28	12.24.06
21/02/2020	12.23.54, 45	12.23.42
23/02/2020	12.23.34, 66	12.23.24
28/02/2020	12.22.54, 47	12.22.36
12/03/2020	12.19.57, 15	12.19.54
08/05/2020	13.06.40, 21	13.06.30
17/05/2020	13.06.34, 57	13.06.24

Tabella 5: Confronto tra orario del mezzogiorno locale stimato in Basilica e orario del mezzogiorno locale teorico

I risultati esposti in tabella vengono riportati nel grafico sottostante a seguito di una conversione dell'orario del mezzogiorno locale in [s] e scegliendo come *giorno 0* il 04/09.

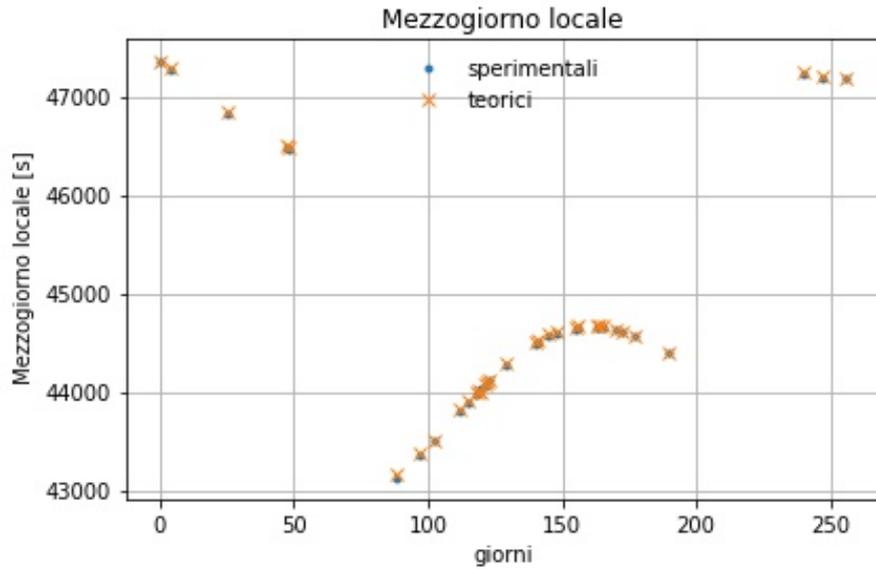


Figura 23: Confronto tra orario del mezzogiorno locale stimato in Basilica e orario del mezzogiorno locale teorico in funzione dei giorni. Il *giorno 0* è il *04/09*.

Si può notare dal grafico un andamento come quello dell'equazione del tempo; i due salti sono dovuti al passaggio dall'ora legale a quella solare e viceversa.

È stata studiata la deviazione della linea meridiana confrontando gli orari di transito delle effemeridi con quelli calcolati in funzioni delle parti centesime, cioè del punto della linea meridiana toccato dal centro dell'immagine solare in quella data, ottenute tramite la formula:

$$PC = 100 \cdot \tan(z) \quad (28)$$

dove PC sta per "parti centesime" e z è l'angolo zenitale.

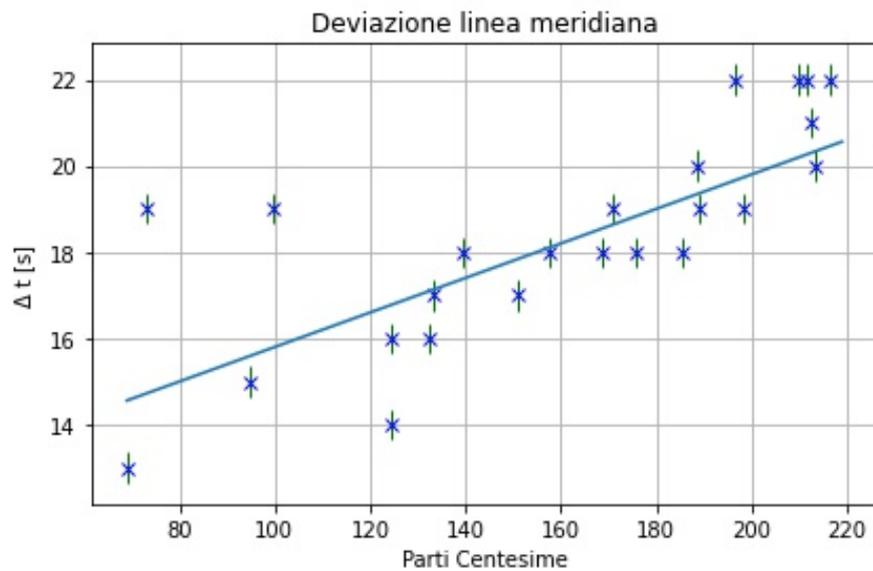


Figura 24: Differenze temporali tra tempi di transito misurati e tempi di transito predetti.

Il fit risulta essere $y = 0.04 \pm 11.8$.

La spiegazione degli andamenti ottenuti è riconducibile ad una deviazione della linea meridiana verso Est: infatti l'immagine del disco solare sul pavimento della basilica procede da Ovest verso Est e, a causa della deviazione verso Est, il Sole passa al centro della linea in ritardo rispetto al mezzogiorno locale.

Il ritardo è maggiore via via che ci si sposta lungo la linea verso i mesi invernali. Dal confronto tra orari di transito misurati in Basilica e quelli predetti teoricamente si osserva un ritardo che raggiunge i 22 s il giorno 28/12/2019.

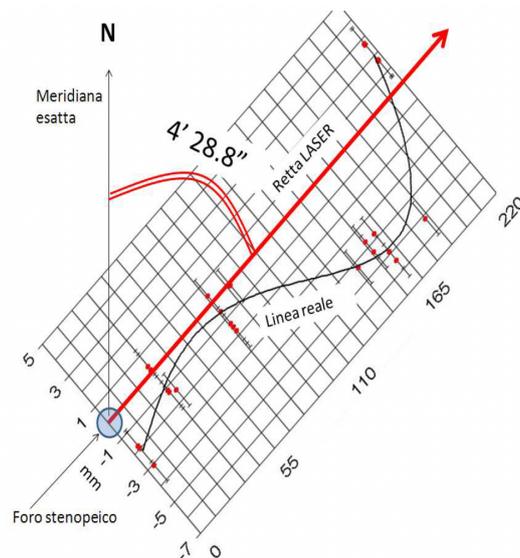


Figura 25: Deviazione della linea meridiana.

Nell'immagine soprastante sono state rappresentate la meridiana esatta, la retta laser che rappresenta la retta che congiunge il primo e l'ultimo punto della linea meridiana. La deviazione presente dalla verticale del foro stenopeico al solstizio d'inverno è di $4'28.8''$, mentre tra i due solstizi, dove la linea è visibile, è orientata $5'12''$ verso Est rispetto alla meridiana esatta e infine, la retta reale che rappresenta la Linea Clementina.

7 Confronto con i dati del cardinale De Zelada

Francesco Saverio de Zelada (1717-1801) fu Segretario di Stato sotto Papa Pio VI, nacque a Roma da una nobile famiglia di origini spagnole e completò gli studi in diritto civile e canonico presso l'università La Sapienza. Lungo il corso della sua vita ricoprì varie cariche: fu ordinato sacerdote nel 1740, nel 1766 venne consacrato arcivescovo di Petra, fu nominato cardinale nel 1773, camerlengo del Sacro Collegio nel 1783 e penitenziere maggiore nel 1788, carica che ricoprì fino alla morte.

Nel 1773 Papa Clemente XIV decretò la soppressione della Compagnia di Gesù, che all'epoca contava 23.000 membri, e de Zelada svolse un ruolo fondamentale. Questo fu un evento cruciale sia per la storia del cattolicesimo sia per la storia della scienza: infatti, a seguito della soppressione dei Gesuiti, gli studi del Collegio Romano furono affidati al clero secolare.

De Zelada fu un punto di riferimento per la cultura di Roma: possedeva collezioni pittoriche, librerie, di antichità, di cere anatomiche e di storia naturale ed era un celebre numismatico. Nel 1779 venne nominato bibliotecario della Santa Romana Chiesa, e nel 1787 finanziò la costruzione della specola del Collegio Romano, arricchendola di strumenti di osservazione astronomica. Nell'osservatorio astronomico furono per la prima volta catalogate le stelle in base al loro spettro tra il 1850 e il 1878, quando padre Angelo Secchi era il direttore.

Presso i Musei Vaticani, in particolare nella prima sala del Museo Gregoriano Etrusco, sono conservati una coppia di sportelli di finestra provenienti dall'appartamento del cardinale De Zelada, sopra i quali è riportato il tempo che il Sole impiega a transitare lungo la meridiana.⁶

The image shows two wooden window shutters with astronomical tables. The tables are organized by month and day, showing the time of solar transit. The months listed are FEBBRAIO, MARZO, APRILE, MAGGIO, GIUGNO, LUGLIO, AGOSTO, SETTEMBRE, OTTOBRE, NOVEMBRE, and DICEMBRE. Each day is listed with a time value, such as 1. 2. 17. 51. 33 for February 1st.

Figura 26: Sportelli di finestra riguardanti i transiti del Sole provenienti dall'appartamento del cardinale de Zelada. Decorati sul lato interno: "Tempo che impiega il Sole a passare la Meridiana". XVIII sec.

⁶La prima sala del Museo Gregoriano Etrusco era precedentemente chiamata Sala della meridiana e fu l'appartamento del cardinale de Zelada. Venne denominata così perché adibita ad ospitare strumenti astronomici ed in particolare una meridiana incassata sul pavimento, successivamente rimossa negli anni '30 del Novecento, di cui oggi resta solo un frammento esposto.

Nello specifico sono elencati i mesi, i giorni, i minuti, i secondi e il diametro solare da Gennaio a Dicembre.

E' stato deciso di confrontare i valori da noi stimati del diametro solare, ricavati studiando il transito del Sole lungo la linea meridiana della Chiesa di Santa Maria degli Angeli, con quelli ottenuti dal cardinale de Zelada. Dal momento che la presa dati è avvenuta nell'intervallo di tempo da Settembre a Marzo il paragone è stato eseguito sui diametri solari ricavati in questo range temporale e non studiando l'intero anno. I valori utilizzati sono riportati nella tabella e nei grafici sottostanti:

Data	Δt (s)	Diametro Solare (<i>arcsec</i>)
1 <i>Settembre</i>	128	1910
7 <i>Settembre</i>	128	1913
13 <i>Settembre</i>	128	1916
19 <i>Settembre</i>	128	1919
25 <i>Settembre</i>	128	1922
1 <i>Ottobre</i>	128	1926
7 <i>Ottobre</i>	129	1929
13 <i>Ottobre</i>	130	1932
19 <i>Ottobre</i>	131	1935
25 <i>Ottobre</i>	132	1939
1 <i>Novembre</i>	133	1942
7 <i>Novembre</i>	135	1945
13 <i>Novembre</i>	136	1948
19 <i>Novembre</i>	138	1950
25 <i>Novembre</i>	139	1952
1 <i>Dicembre</i>	140	1954
7 <i>Dicembre</i>	141	1956
13 <i>Dicembre</i>	142	1957
19 <i>Dicembre</i>	142	1958
25 <i>Dicembre</i>	142	1958
1 <i>Gennaio</i>	142	1958
7 <i>Gennaio</i>	141	1957
13 <i>Gennaio</i>	140	1956
19 <i>Gennaio</i>	139	1955
25 <i>Gennaio</i>	138	1954
1 <i>Febbraio</i>	136	1952
7 <i>Febbraio</i>	135	1950
13 <i>Febbraio</i>	134	1948
19 <i>Febbraio</i>	132	1945
25 <i>Febbraio</i>	131	1943
1 <i>Marzo</i>	130	1940
7 <i>Marzo</i>	129	1937
13 <i>Marzo</i>	129	1934
19 <i>Marzo</i>	128	1930
25 <i>Marzo</i>	128	1927

Tabella 6: Misure del Tempo di transito e del Diametro Solare stimate dal Cardinale de Zelada

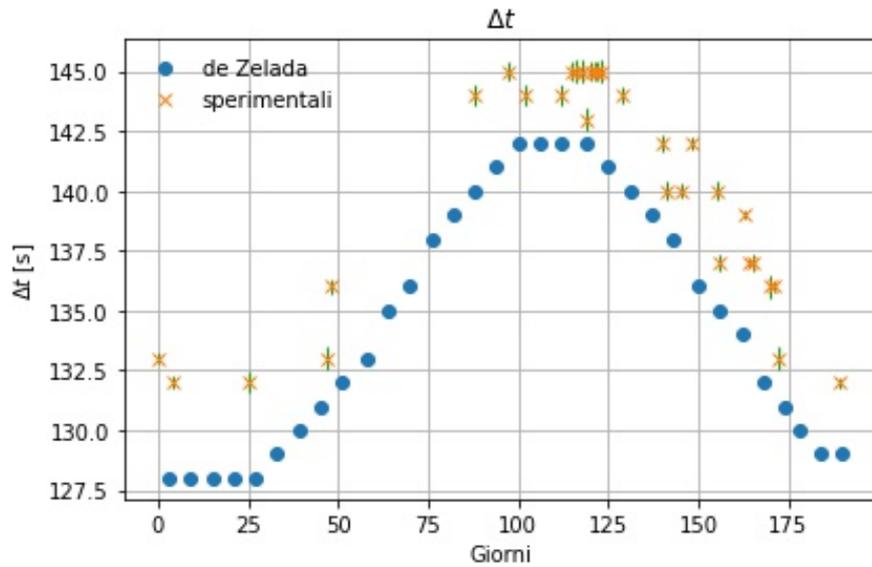


Figura 27: Confronto tra il tempo che il Sole impiega a percorrere la linea meridiana misurato dal cardinale de Zelada e quello valutato dalle osservazioni Basilica.

Sull'asse x vengono rappresentati i giorni in cui sono stati effettuati entrambi i set di presa dati ed è stato scelto come *giorno 0* il *04/09*. Sull'asse y invece è rappresentato il tempo che il Sole impiega a percorrere la linea meridiana, che nel nostro caso, è stato ricavato calcolando il tempo che intercorre tra il contatto dei lembi precedente e seguente con la linea meridiana.

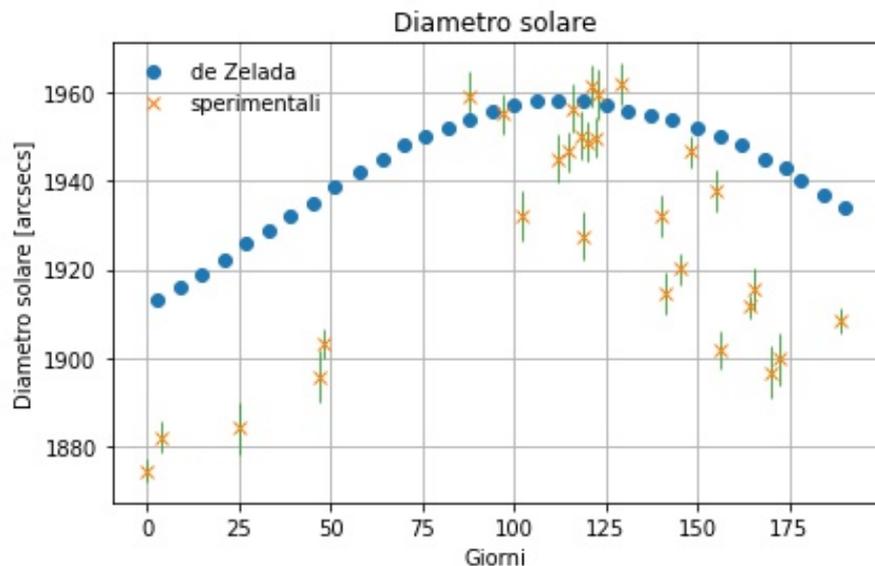


Figura 28: Confronto tra le misure di diametro solare stimate dal cardinale de Zelada e quelle stimate osservando i transiti meridiani in Basilica.

Come nel grafico precedente, sull'asse x vengono rappresentati i giorni in cui sono stati effettuati entrambi i set di presa dati ed è stato scelto come *giorno 0* il *04/09*. Sull'asse y invece è rappresentato il diametro solare stimato in *arcsec*.

Come si può notare i valori da noi stimati del diametro solare risultano tendenzialmente inferiori a quelli stimati dal Cardinale de Zelada. Inoltre, come si può osservare dalla

tabella 6 soprastante, il massimo diametro solare determinato da de Zelada risulta essere $\theta = 1958''$ nei giorni 19 e 25 Dicembre. Questo valore è maggiore del diametro solare reale il cui massimo risulta essere $\theta = 1952''$. L'andamento estremamente preciso dei dati del Cardinale suggerisce che questi siano in realtà valori teorici. Se così fosse la sovrastima del diametro solare pari a $6''$ potrebbe essere legata ad una approssimazione per eccesso nel riportare i calcoli sugli sportelli. Altrimenti è possibile che per realizzare le misure sia stato utilizzato un telescopio e allora la sovrastima potrebbe essere dovuta all'irradiazione. Si riportano di seguito alcune pagine dal libro "Sulla costituzione del Sole" del professore Giorgio Abetti relative a questo problema:

Già nel 1750 Bradley eseguiva misure sistematiche del diametro solare a varie latitudini e, a parte il problema di una sua eventuale diminuzione secolare, ben presto si incominciò a discutere sulla sfericità del globo solare e della variabilità del suo o dei suoi diametri, forse in relazione con le varie fasi di attività solare. Le misure del diametro sono state cominciate, e si fanno tuttora, con i cerchi meridiani, determinando a mezzo dei tempi dei passaggi in meridiano dei lembi ovest e est, il diametro orizzontale e, dalla differenza di declinazione fra i lembi nord e sud, quello verticale. Il diametro viene inoltre determinato a mezzo degli eliometri o con la fotografia. Il P. Secchi e il P. Rosa, dell'Osservatorio del Collegio Romano, hanno discusso il problema delle variazioni del diametro solare dalle osservazioni allora esistenti, ed il secondo di questi, in un lavoro dettagliato, concludeva che in quelle epoche in cui il numero delle macchie e delle protuberanze è minore, il diametro equatoriale è maggiore. Similmente R. Wolf, dalla discussione delle osservazioni eseguite da Hilfiker col cerchio meridiano trova, in corrispondenza del grande massimo del 1870, un risultato corrispondente a quella che egli chiama legge Secchi-Rosa.

Anche all'Osservatorio del Campidoglio, dal 1877 si continuano ad eseguire sistematiche osservazioni con il passaggio al meridiano del diametro solare le quali dimostrano la sua variabilità. Ma è difficile stabilire in qual grado essa sia propria del sole o dovuta ad altre cause.

Intanto il problema è probabilmente complicato dal fatto che i due diametri, polare ed equatoriale, presentano una lieve differenza, pur essa variabile, in relazione con il ciclo di attività. Secondo le ricerche di Lane Poor, su osservazioni fatte da vari investigatori con diversi metodi, il rapporto fra i diametri polare ed equatoriale sarebbe periodicamente variabile. La lunghezza del periodo resta incerta, ma sembra essere approssimativamente quella del ciclo delle macchie. L'amplitudine di questa variazione è circa $0''.2$, la differenza fra i massimi valori positivi e negativi essendo di circa $0''.5$.

A Greenwich, dove si osservano regolarmente col cerchio meridiano i diametri del sole, dalla discussione del decennio 1915-1925 risulta, che il diametro verticale è maggiore di quello orizzontale di $0''.3$, differenza che, almeno in parte, può essere dovuta al differente metodo di osservazione, il quale, come già detto, per il diametro orizzontale consiste nel misurare i tempi del passaggio al meridiano, con un micrometro autoregistratore, per quello verticale nel misurare con i cerchi la differenza di distanza zenitale fra il lembo nord e quello sud.

Un esame dei diametri osservati, in relazione col periodo delle macchie, ha condotto a risultati incerti; invece, ordinando per ogni mese durante il decennio, per ambedue i diametri, le differenze fra i diametri calcolati nel Nautic Almanac e quelli osservati, risultano delle variazioni massime di un secondo d'arco, essendo il diametro maggiore in estate e minore in inverno.

Discutendo le varie cause, che possono produrre un simile effetto, si giunge alla conclusione che esso sia dovuto alla irradiazione e alla sua variazione nel corso dell'anno. Infatti, se si fa l'ipotesi che l'irradiazione sia variabile al variare dell'assorbimento at-

mosferico, secondo la diversa altezza del sole sull'orizzonte, ed anche per variazioni di contrasto fra il disco luminoso del sole, e lo sfondo del cielo, Cullen, il quale ha discusso le osservazioni di Greenwich, trova che le variazioni del diametro sono proporzionali alla secante della distanza zenitale del sole, raggiungendo appunto un secondo d'arco. D'altra parte l'effetto totale della irradiazione sul diametro del sole, che è in media di 1920", sembra sia di 3". Se ne deduce che le variazioni annue del diametro solare, dovute alla irradiazione, sono piuttosto notevoli, e quindi non deve far meraviglia che risulti assai difficile distinguere, da questa variazione apparente, una eventuale variazione effettiva del globo solare.

La questione è lungi dall'essere risolta: sembra che sia necessario escogitare dei metodi di misura più precisi, ed eseguire le osservazioni in luoghi dove le variazioni dovute a cause terrestri siano le minori possibili. Che possa esistere una differenza fra il diametro polare e quello equatoriale del sole, e che questa sia variabile, potrebbe venire confermato dal fatto che sembrano esistere delle variazioni nell'inviluppo esterno del sole, chiamato "cromosfera", e del fatto che hanno luogo periodicamente notevolissime variazioni nell'altro inviluppo più esterno, cioè la "corona solare" a noi visibile soltanto durante le eclissi totali.

Era già stato notato da Respighi che la cromosfera ha altezza variabile alle diverse latitudini; dalle regolari osservazioni eseguite in Arcetri durante l'ultimo ciclo sembra risultare, che l'altezza della cromosfera è maggiore ai poli che all'equatore alle epoche di minima attività solare, ed ha invece approssimativamente la stessa altezza attorno a tutto il bordo durante le epoche di massima attività.

La corona solare poi presenta delle configurazioni ben definite con espansione della materia coronale ora all'equatore ed ora ai poli, in corrispondenza ai massimi e minimi dell'attività solare.

Da questo estratto si evince che la questione della variazione del diametro solare risulta ancora aperta: le differenze tra le misure del diametro polare e del diametro equatoriale in parte potrebbero essere dovute alle diverse tecniche di misurazione dei due diametri ma anche a variazioni periodiche della cromosfera e della corona solare legate ai massimi e ai minimi dell'attività solare. Tuttavia anche il fenomeno dell'irradiazione può portare a variazioni annue del diametro solare dal momento che questa varia in base all'assorbimento atmosferico, all'altezza del Sole dall'orizzonte e anche in base al contrasto tra disco solare e il cielo sullo sfondo, come spiegato dal testo. L'irradiazione solare è una sorta di alone strumentale per cui non si riesce ad osservare il diametro reale del Sole e, in base allo strumento di misura che si utilizza, può portare ad un allargamento del diametro solare e probabilmente a causa di esso de Zelada ha sovrastimato i suoi calcoli.

8 Conclusioni

Lo scopo di questo esperimento è stato quello di misurare il diametro angolare del Sole attraverso la tecnica dei transiti, utilizzando lo Gnomone Clementino ubicato nella Basilica di Santa Maria degli Angeli a Roma.

La meridiana risulta affetta da una deviazione verso Est che introduce errori sistematici nella stima dei tempi di transito meridiano di cui va tenuto conto in fase di analisi dei dati, ciò non preclude la possibilità di effettuare misure di elevata precisione sia relative ai tempi di transito che ai diametri angolari solari.

Di seguito riportiamo i dati da noi ottenuti.

I diametri angolari δ_i , riportati in tabella 4 nel Capitolo 6 e graficati in figura 16, sono stati confrontati con quelli attesi dalle effemeridi δ_i^* . È stata calcolata la differenza in modulo fra i valori attesi e quelli misurati e se ne è fatta la media pesata, ottenendo:

$$|\overline{\delta^* - \delta}| = 19.0 \pm 4.3 \text{ arcsec} \quad (29)$$

Questa discrepanza è possibilmente attribuibile ad una sovrastima della penombra che ha una forte componente casuale legata alle condizioni atmosferiche. Inoltre il contorno della figura risulta continuamente mosso e sfumato a causa del seeing e della turbolenza. Ciò fa sì che i diametri stimati risultino più piccoli di quelli attesi.

Facendo un ulteriore studio sulla penombra è stato inoltre osservato che la media pesata della differenza fra i valori attesi dalle effemeridi e quelli misurati in Basilica viene minimizzata non sottraendo l'intero diametro del foro stenopeico all'immagine solare ma solamente una frazione $\Delta = 0.8$ (figura 18). In questo modo si ottiene:

$$|\overline{\delta^* - \delta}| = 12.4 \pm 4.3 \text{ arcsec} \quad (30)$$

in questo modo si ottengono dei valori di diametro angolare solare più vicini a quelli previsti, tenendo però conto del fatto che in realtà il valore della penombra da sottrarre al diametro angolare misurato non è costante, ma cambia a seconda delle condizioni atmosferiche presenti nei giorni delle misure.

È stato eseguito uno studio riguardante l'orario del mezzogiorno locale confrontando i tempi di transito meridiano del Sole misurati in Basilica con quelli ricavati tramite l'equazione del tempo e la correzione in longitudine. Nel grafico 23 presente nel Capitolo 6 è riportato l'andamento ottenuto che è concorde con quello atteso.

È stata inoltre studiata la deviazione della linea meridiana in funzione delle parti centesime della linea stessa attraverso il confronto degli orari di transito delle effemeridi e quelli misurati in Basilica. L'andamento trovato evidenzia una deviazione della linea meridiana verso Est. Questo risultato è compatibile con le aspettative, infatti la linea meridiana risulta deviata di circa $5' 12''$ verso Est e questo comporta un tempo di transito maggiore rispetto a quello atteso. Ciò si può osservare dalla figura 24.

I tempi di percorrenza del Sole sulla linea meridiana e i diametri angolari solari misurati sono stati comparati con quelli del Cardinale De Zelada. Infatti nell'appartamento del Cardinale erano presenti ante di finestra decorate sul lato interno con i tempi di transito e i diametri angolari solari relativi ad un intero anno di misure. Anche da questo studio è stata confermata la sottostima dei diametri angolari misurati, ma si è anche osservata la sovrastima dei diametri angolari misurati da De Zelada. Nello specifico, l'andamento dei dati del Cardinale suggerisce che questi siano stati ricavati da calcoli teorici e non da

misure sperimentali, risultano infatti estremamente precisi. Se così fosse la sovrastima è probabilmente legata ad una approssimazione per eccesso nel riportare i calcoli sugli sportelli. In tal caso questi valori riportati negli sportelli sono interessanti perché, essendo calcoli, includono nei loro risultati anche i tempi di afelio e perielio da cui si può ricavare l'anno al quale si riferiscono.

Un'altra possibile spiegazione della sovrastima del diametro angolare solare è legata al fenomeno dell'irradiazione riconducibile ad un possibile utilizzo di telescopi per effettuare le misure.

Appendice A

È riportata la tabella con all'interno gli orari di transito misurati e quelli previsti dalle effemeridi per gli anni 2019/2020, utilizzati nella Figura 24.

Data	Tempo di transito misurato (± 0.35 s)	Tempo di transito effemeridi
04/09/2019	13.09.21,01	13.09.08,30
08/09/2019	13.08.01,07	13.07.47,20
29/09/2019	13.00.40,15	13.00.24,80
21/10/2019	12.54.54,34	12.54.37,90
22/10/2019	12.54.46,33	12.54.30,20
01/12/2019	11.59.13,16	11.58.53,70
25/12/2019	12.10.16,56	12.09.53,80
28/12/2019	12.11.45,12	12.11.22,90
31/12/2019	12.13.11,25	12.12.50,40
01/01/2020	12.13.39,49	12.13.19,00
03/01/2020	12.14.37,27	12.14.15,30
04/01/2020	12.15.05,17	12.14.42,80
05/01/2020	12.15.29,48	12.15.10,00
11/01/2020	12.18.03,67	12.17.42,60
22/01/2020	12.21.44,41	12.21.25,90
23/01/2020	12.22.00,77	12.21.42,00
27/01/2020	12.22.57,11	12.22.38,50
30/01/2020	12.23.30,93	12.23.12,30
06/02/2020	12.24.20,95	12.24.02,10
07/02/2020	12.24.23,61	12.24.05,90
15/02/2020	12.24.25,98	12.24.08,40
16/02/2020	12.24.23,28	12.24.05,40
21/02/2020	12.23.54,45	12.23.40,20
12/03/2020	12.19.57,15	12.19.38,10

Tabella 7: Orari di transito misurati e orari di transito previsti dalle effemeridi per gli anni 2019/2020

Riferimenti bibliografici

- [1] C. Sigismondi (2014), *Lo Gnomone Clementino - Astronomia Meridiana in Basilica*, GERBERTVS vol. 7
- [2] C. Sigismondi (2021), *Astrometric calibration of the Clementine meridian line (1702) of S. Maria degli Angeli on the zodiacal signs, in the IGEA observational campaign (2018/21)*
- [3] C. Sigismondi (2021), *Reference system effects detected with meridian astronomy on the Clementine Gnomon (Rome), 1702)*
- [4] C. Sigismondi (2007) *Introduzione al calcolo astronomico*,
- [5] E. Landi Degl'Innocenti (2008), *Fisica solare*
- [6] Grant R. Fowles (1975), *Introduction to modern optics*
- [7] G. Abetti (1952), *Il Sole*, Hoepli, Milano
- [8] *Tempo Legale Italiano*, <http://rime.inrim.it/labtf/tempo-legale-italiano/>
- [9] John Goodall (2003), *A journey in time. The remarkable story of Seiko*
- [10] Caccin, B. Penza, V. 2003. Mem. S.A.It. Vol. 74, 663-666
- [11] <http://spiff.rit.edu/classes/phys440/lectures/limb/limb.html/>
- [12] *De Zelada*, [https://www.treccani.it/enciclopedia/francesco-saverio-de-zelada_\(Dizionario-Biografico\)/](https://www.treccani.it/enciclopedia/francesco-saverio-de-zelada_(Dizionario-Biografico)/)
- [13] <http://cma.entecra.it/PreScen/Astronomia.htm/>
- [14] <https://catalogo.museivaticani.va/index.php/Detail/objects/MV.44538.0.0/>
- [15] <https://m.museivaticani.va/content/museivaticani-mobile/it/collezioni/musei/museo-gregoriano-etrusco/sala-xxi-della-meridiana-ceramica-attica-ed-etrusca/sala-xxi-della-meridiana-ceramica-attica-ed-etrusca.html/>
- [16] <https://www.rete-dida.it/dida/astro/analemma.htm>